

**Veränderungs- und Erneuerungsvorgänge
innerhalb von Personengesamtheiten
in kontinuierlicher Darstellung**

**Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin**

**vorgelegt von
Angelika Herr
aus Frankfurt / Main**

1977

Veränderungs- und Erneuerungsvorgänge innerhalb von Personengesamtheiten in kontinuierlicher Darstellung

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Angelika Herr
aus Frankfurt / Main

1.Referent: Professor Dr. G. Wünsche

2.Referent: Professor Dr. H. Begehr

Tag der mündlichen Prüfung: 1.6.1977

Tag der Promotion: 15. 6. 1977



Meinem hochverehrten Lehrer,
Herrn Professor Dr. GÜNTHER WÜNSCHE,
möchte ich an dieser Stelle für seine
Vorlesungen, mathematischen Anregungen
und wertvollen Ratschläge, aus denen
diese Dissertation entstanden ist, und
für sein fortwährendes Wohlwollen, wo-
durch meine persönliche Entwicklung
gefördert wurde, meinen aufrichtigen
Dank aussprechen.

Weiterhin gilt mein Dank
Herrn Professor Dr. HEINRICH BEGEHR
für die freundliche Übernahme des
Korreferates.

Berlin, im April 1977

Angelika Herr

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
A) Vorbereitende Grundbegriffe	1
B) Übersicht und Problemstellung	5
C) Veränderungsvorgänge in Personengesamtheiten	11
C ₁) Das quadratische Schema der Veränderungen mit Diagonalverbindungen	11
I <u>1. Ansatz mit Näherungsgleichung</u>	11
1. Die Differentialgleichungen des Systems	11
2. Die Überführung der Differentialgleichungen in eine Integralgleichung für die totale Personengesamtheit	14
3. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Bestände	21
II <u>2. Ansatz mit Näherungsgleichung</u>	29
1. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Personenbestände direkt aus den Differentialgleichungen des Systems	29
III <u>3. Ansatz mit Integralgleichungssystemen</u>	34
1. Die Bestimmung der einzelnen Bestände durch Überführen eines Systems von Fred- holmschen Integralgleichungen in eine einzige	34
2. Die Abschätzung der einzelnen Bestände durch Überführen eines Systems von Vol- terraschen Integralgleichungen in eine einzige	38
IV <u>4. Ansatz mit iterierten Integralgleichungen</u>	49
1. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Bestände durch Iteration	49
C ₂) Das verallgemeinerte Schema der Veränderungen mit Querverbindungen	54

D) Die Lösung der Problemstellungen C	56
V <u>Funktionalanalytische Aspekte des Problems</u>	56
1. Einführung des Fredholm-Operators	56
2. Anwendung auf lineare Integralgleichungen	60
VI <u>Die Lösung der Volterraschen Integralgleichung</u>	70
1. Der Hauptsatz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	70
2. Das Spektrum eines Integralgleichungskerns	79
E) Erneuerungsvorgänge in Personengesamtheiten	81
VII <u>Erneuerungstheoretische Grundbegriffe</u>	81
1. Übersicht über die Komplexität offener Gesamtheiten	81
2. Die Intensitäten für die Hauptgesamtheit bzw. für die totale Personengesamtheit im verallgemeinerten Schema C_2	84
VIII <u>Die Erneuerungsgleichung und ihre Lösbarkeit</u>	89
1. Die Herleitung der Erneuerungsgleichung	89
2. Die Lösung der Erneuerungsgleichung	96
3. Interpretation der Erneuerungsgleichung	102
F) Anwendungsmöglichkeiten	104
G) Historischer Überblick	108

ANMERKUNGEN

ABKÜRZUNGEN

LITERATURVERZEICHNIS

LEBENS LAUF

A) Vorbereitende Grundbegriffe

Der Themenkreis der vorliegenden Arbeit basiert auf dem Grundbegriff der "Gesamtheiten".

Je nachdem, welche Elemente oder Individuen der betreffenden Gesamtheit angehören, spricht man von "Personengesamtheiten" oder "Gesamtheiten allgemeineren Charakters", deren zugehörige Objekte z.B. Eisenbahnschwellen, Atome, Bakterien, Telegraphenstangen, Maschinen usw. sein können.

Allgemein versteht man unter einer "Gesamtheit" eine eindeutig definierte Menge von Objekten. Von allen Objekten einer Gattung muß bekannt sein, ob sie der entsprechenden Gesamtheit angehören oder nicht.

Weiterhin ist denkbar, daß ein Objekt nicht nur ein einziges Merkmal besitzt, aufgrund dessen es einer bestimmten Gesamtheit angehört, sondern es kann im Besitz von 2,3,4, ... , allgemein: im Besitz von k Merkmalen ($k \in \mathbb{N}$) sein. Statt von "Merkmalen" oder "Kennzeichen" spricht man auch von "Attributen".

Unter einer "Hauptgesamtheit" versteht man eine Menge von Objekten mit k vorher festgesetzten Attributen, während die übrigen Objekte, die eines oder mehrere der k Attribute im Laufe der Zeit aus irgendwelchen Gründen ("Ausscheideursachen") verloren haben, in $2^k - 1$ "Nebengesamtheiten" zerfallen; nämlich in die $\binom{k}{k-1}$ Nebengesamtheiten, denen jeweils Elemente angehören, die im Besitz von genau $k-1$ der k Attribute sind, weiter in die $\binom{k}{k-2}$ Nebengesamtheiten mit Elementen von genau $k-2$ Attributen usw..... und schließlich in die $\binom{k}{k-k} = \binom{k}{0} = 1$ Nebengesamtheit mit Elementen, die alle Attribute verloren haben.

Die oben genannte Behauptung gilt aufgrund der Identität $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k$, aus der man abliest, daß es eine einzige Hauptgesamtheit und $2^k - 1$ Nebengesamtheiten bei Vorgabe von k Attributen gibt.

Der eben beschriebene Zerfall einer Hauptgesamtheit in mehrere Nebengesamtheiten - manche Autoren sprechen von Stamm- und abgeleiteten Gesamtheiten ($[10]$)¹⁾ oder kurz von Beständen ($[20]$) - beruht auf den sog. "Ausscheideordnungen". Sie geben an, wieviele Elemente einer bestimmten Gesamtheit innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls aufgrund einer bestimmten Ursache ausscheiden und damit in eine andere Gesamtheit überwechseln.

Auch der entgegengesetzte Fall, daß verlorene Attribute wiedererworben bzw. zurückgewonnen werden können, ist denkbar und soll daher in die Betrachtungen mit einbezogen werden. Die zugehörigen "Maßfunktionen", die die "Geschwindigkeit" der Veränderung angeben, heißen "Übergangs-" oder "Ausscheideintensitäten".

Neben der Möglichkeit des Verlustes oder der Wiedergewinnung von Attributen - dies entspricht einem Hin- und Herpendeln der Elemente innerhalb der Bestände - ist noch ein dritter Fall denkbar: der Austritt von Objekten aus der jeweiligen Gesamtheit in einen nicht zu den Haupt- und Nebengesamtheiten gehörenden Bestand, aus dem kein weiteres Ausscheiden mehr möglich ist.

Wendet man die bisher eingeführten Begriffe auf einen Spe-

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

zialfall, nämlich auf den die Mathematik der Lebensversicherung charakterisierenden Fall der "Personengesamtheiten" an, so bestehen Haupt- und Nebengesamtheiten aus Personen mit jeweils einer bestimmten Anzahl von Attributen, die Ausscheideintensitäten entsprechen Funktionen, die das Überwechseln von einer in eine andere Gesamtheit beschreiben, und die im dritten Fall erläuterten Austritte entsprechen der Ausscheideursache "Tod".

Ein Beispiel aus der Invaliditätsversicherung möge das Bisherige noch verdeutlichen für den Fall $k=2$: Zu einem festen Anfangszeitpunkt bestehe die Hauptgesamtheit aus verheirateten Aktiven des Alters x_0 , also aus Personen mit den beiden Attributen "verheiratet" und "aktiv". Die $2^k - 1 = 3$ Nebengesamtheiten enthalten Personen, die einerseits noch das eine Attribut "verheiratet" oder das andere "aktiv" tragen, oder die andererseits inzwischen beide Attribute verloren haben. Die Hauptgesamtheit der "verheirateten Aktiven" zerfällt also in die drei Nebengesamtheiten der "ledigen Aktiven", der "verheirateten Invaliden" und der "ledigen Invaliden". Die Ausscheideintensitäten tragen in diesem Spezialfall die Bezeichnungen: Sterbens-, Invalidisierungs-, Verheiratungs-, Reaktivierungsintensität usw.

Unter "Veränderungsvorgängen in Personengesamtheiten" soll im folgenden die eben besprochene zeitliche "interne" Entwicklung von Haupt- und Nebengesamtheiten nur unter Berücksichtigung von Verlusten und Wiedergewinnung der Attribute oder von Austritt durch Tod verstanden werden. Personengesamtheiten mit diesen Eigenschaften, d.h. mit dem Charakte-

ristikum des Fehlens von Neuzugängen, heißen "geschlossene Gesamtheiten".

Dagegen werden in "offenen Gesamtheiten" die ausgeschiedenen Elemente jeweils sofort durch neue ersetzt, deren Altersstruktur bestimmten Bedingungen unterworfen sein kann. Die Theorie der "Erneuerungsvorgänge in Personengesamtheiten" behandelt die Entwicklung, die sich aufgrund von Erneuerungen oder Neuzugängen abzeichnet und von der der "Veränderungsvorgänge" natürlicherweise stark abweicht.

Auf die möglichen Einteilungen der offenen Bestände in "natürliche", "einfache", "allgemeine" oder "verallgemeinerte natürliche" Gesamtheiten ([17a]) brauchen wir nicht näher einzugehen, da im Verlauf der Arbeit im Abschnitt E nur ein Spezialfall der Erneuerungstheorie behandelt wird.

B) Übersicht und Problemstellung

Das Ziel dieser Arbeit kann nach der vorangegangenen Einführung der Grundbegriffe kurz folgendermaßen erläutert werden:

KRIEHL untersucht in seiner Dresdener Dissertation (1936) ([10]) das Problem der Gesamtheiten in der Invaliditätsversicherung, indem er in vier Beständen jeweils stetige Maßfunktionen voraussetzt, die den Verlust oder die Wiedergewinnung genau eines Attributes beschreiben. Dabei läßt er keine Diagonalverbindungen zu, welche dem Verlust oder Wiedererwerben zweier Attribute gleichzeitig bzw. innerhalb einer Zeiteinheit entsprechen.

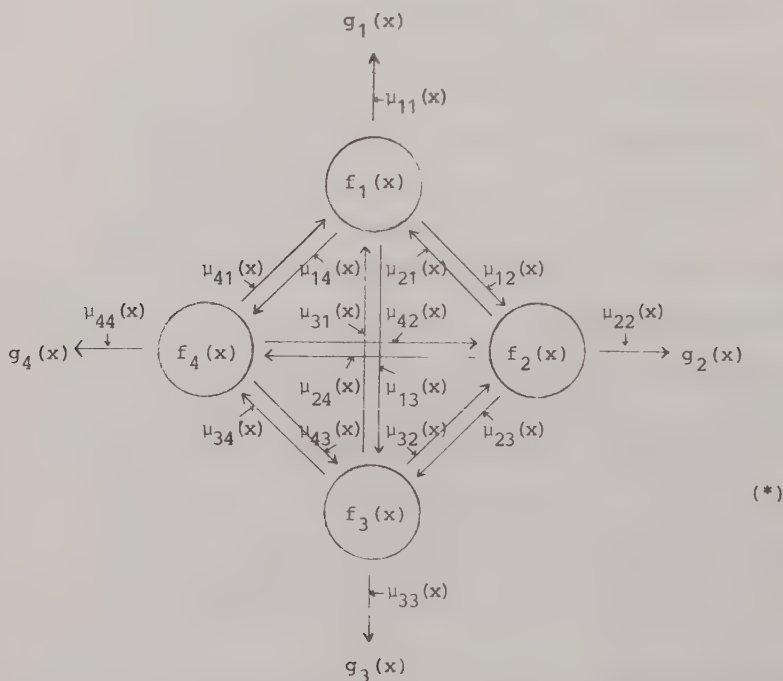
Dieses Modell soll in dreifacher Weise verallgemeinert werden, angesichts der durchaus praxisbezogenen Tatsache, daß gleichzeitig bzw. innerhalb einer Zeiteinheit mehrere Veränderungen mit einer Person geschehen können - z.B. können Invalidisierung und Heirat oder Genesung, Scheidung und Austritt aus einer Versicherung in einem einzigen Jahr eintreten.

1. Verallgemeinerung:

Zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt mögen vier "Anfangsbestände" von x_0 -jährigen Personen $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, $f_3(x_0)$, $f_4(x_0)$, die sich in Haupt- und Nebengesamtheiten unterteilen, als bekannt vorliegen. Weiterhin mögen die Ausscheideintensitäten $\mu_{ik}(x)$ ($i, k = 1, \dots, 4$), die die "interne" Entwicklung der Veränderungen beschreiben, als stetige Funktionen gegeben und unter ihnen sowohl die "einfachen" als auch die "diagonalen" Verbindungen enthalten sein. Die Größen $f_i(x) \cdot \mu_{ik}(x)$ geben dann für $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Anzahl der überwechselnden

Elemente von der i -ten in die k -te Gesamtheit im Zeitpunkt x ($x \geq x_0$) an.

Das Schema des Zerfalls kann durch folgende Skizze beschrieben werden:



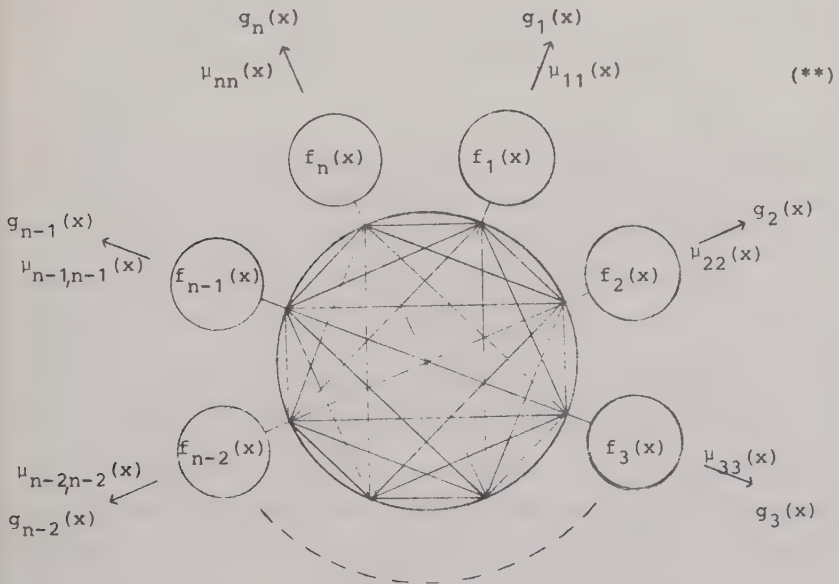
Die dabei auftretenden Bestände $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, 4$) werden in Def. 1.1.1. exakt eingeführt.

Die 1. Verallgemeinerung gegenüber dem KRIEHLschen Modell besteht also in der Hinzunahme der diagonalen Ausscheideintensitäten $\mu_{ik}(x)$ mit $|i-k| = 2$ in das Zerfallsschema.

2. Verallgemeinerung:

Das unter (*) beschriebene Modell soll von 4 auf $n := 2^k$ Be-

stände ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest) erweitert und sämtliche in diesem Fall neu hinzukommenden Querverbindungen der Ausscheideintensitäten mit einbezogen werden. Die nachstehende Skizze stellt das Zerfallsschema dar: (vgl. dazu Anmerkung <1>)²⁾



Die 2. Verallgemeinerung ist also charakterisiert durch die Berücksichtigung sämtlicher nur denkbaren internen Prozesse innerhalb der Gesamtheiten $1, 2, \dots, 2^k = n$.

Gesucht sind dann - und das ist das in dieser Arbeit gestellte Ziel - die zahlenmäßigen Umfänge der einzelnen Bestände als Funktionen der Zeitvariablen, ausgehend von bekannten Anfangsbeständen und gegebenen Intensitäten.

Die Verallgemeinerung (*) wird im Abschnitt C₁ abgehandelt,

²⁾ Die Zahlen in spitzen Klammern < > beziehen sich auf die Anmerkungen am Schluß der Arbeit.

und es wird in vier sich voneinander unterscheidenden Ansätzen versucht, dieses Ziel zu erreichen. Dabei können in den Ansätzen der Kapitel I und II in jedem Zeitpunkt x ($x \geq x_0$) Aussagen über die Bestandesgrößen gewonnen werden, wenn man eine aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung entstandene Näherung akzeptiert. Mit Näherungsformeln zu arbeiten ist in der Praxis durchaus üblich und stellt daher keine erhebliche Einschränkung dar.

Die Ansätze der Kapitel III und IV führen auf die Theorie der Integralgleichungssysteme und iterierten Integrale und können entweder die Personenbestände direkt darstellen - wie in III.1. und IV.1. - oder aber - wie dies in III.2. geschieht - wenigstens größenmäßig nach oben abschätzen.

Nachdem im Abschnitt C_2 die Verallgemeinerung von (*) auf das Schema (**) stattgefunden hat, werden die in C_1 und C_2 durch die verschiedenen Ansätze auftretenden Integralgleichungen im Abschnitt D durch die Methode der sukzessiven Approximation gelöst.

3. Verallgemeinerung:

Die bis dahin behandelten geschlossenen Personengesamtheiten werden im Abschnitt E durch offene und die "Veränderungsvorgänge" durch die daraus resultierenden erneuerungstheoretischen Betrachtungen ersetzt.

Das in (**) beschriebene Modell wird in Kapitel VII unter dem Einfluß von Neuzugängen in zwei verschiedenen Fällen behandelt und führt in Kapitel VIII zur Interpretation der sog. "Erneuerungsgleichung" für die Hauptgesamtheit f_1 bzw. für die totale Personengesamtheit $F := f_1 + f_2 + \dots + f_n$.

Die von KRIEHL in [10] untersuchten und in dieser Arbeit aufgegriffenen und verallgemeinerten Problemstellungen gehen von linearen inhomogenen Differentialgleichungen aus, die im Fall der reinen Veränderungsvorgänge in Volterra-sche Integralgleichungen 2. Art im Riemannschen Sinn überführt werden können, während sich bei Hinzunahme von Erneuerungsvorgängen eine Volterra-sche Integralgleichung 2. Art im Riemann-Stieltjesschen Sinn herleiten läßt. Die Analogie dieses Ergebnisses wird noch betont, indem beide Typen von Integralgleichungen jeweils in einem Hauptsatz (6.1.2. bzw. 8.2.3.) nach der "Methode der sukzessiven Approximation" gelöst werden. Ihre Lösungen führen zu den gesuchten Funktionen des Fragenkomplexes.

Dadurch zerfällt die Arbeit in zwei Teile, die durch die Parallelität von Aufbau, Struktur und Analogie der Herleitung charakterisiert sind.

Anwendungsmöglichkeiten und ein historischer Überblick über die Grundlagen und Randprobleme der behandelten Theorie beschließen in den Abschnitten F und G die Arbeit.

Da die Beschreibung der Mathematik der Lebensversicherung stets durch die diskontinuierliche als auch durch die kontinuierliche Darstellung gegeben werden kann, werden wir uns auf eine der beiden Darstellungen beschränken müssen und ziehen für diese Arbeit die kontinuierliche vor. Sie ermöglicht eine elegantere Bearbeitung und Lösung der Aufgaben als die diskontinuierliche Methode. Aber auch der zuletzt genannte Ansatz ist durchaus üblich und wurde von vielen Autoren, u.a. von ZWINGGI (1955) und KANTERS ([8]) für

erneuerungstheoretische Betrachtungen vertreten, und WÜNSCHE
gelangte in [21a] - ausgehend vom diskontinuierlich darge-
stellten Zerfallsschema - zu versicherungsgeometrischen Stu-
dien.

C) Veränderungsvorgänge in Personengesamtheiten

C₁ Das quadratische Schema der Veränderungen mit Diagonalverbindungen

I. 1. Ansatz mit Näherungsgleichung

I. 1. Die Differentialgleichungen des Systems

Definition 1.1.1.

$f_1(x)$ bezeichne die Anzahl von x -jährigen Personen einer Hauptgesamtheit 1, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ die Anzahl von x -jährigen Personen der zugehörigen Nebengesamtheiten 2, 3, 4.

Die Alters- bzw. Zeitachse werde durch die Variable x beschrieben und beginne beim Eintrittsalter x_0 .

Die Anfangsbestände seien durch $f_i(x_0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) gegeben und als bekannt vorausgesetzt.

Ferner werden mit $\mu_{ik}(x)$ ($i, k = 1, 2, 3, 4; i \neq k$) die Ausscheidintensitäten und mit $\mu_{ii}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) die Sterbensintensitäten bezeichnet.

$g_i(x)$ sei für $i = 1, 2, 3, 4$ die Anzahl der aus der Gesamtheit i im Zeitraum von x_0 bis x durch μ_{ii} ausgeschiedenen Toten.

Bemerkung 1.1.2.

1. Mit Absicht sind die in Def. 1.1.1. auftretenden Funktionen $f_i(x)$ so allgemein gehalten, daß man sie als Gesamtheiten der Invaliditäts-, Kranken-, Witwen- oder Waisenversicherung oder als Gesamtheiten allgemeinen Charakters interpretieren kann.
2. Über den bekannten Umfang der Anfangsbestände $f_i(x_0)$ ($i = 2, 3, 4$) wird keine Voraussetzung gemacht, insbesondere wird nicht

$f_i(x_0) = 0$ ($i = 2, 3, 4$) gesetzt.

3. Während man über die zeitabhängigen Funktionen $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) wegen des durch Zu- und Abgänge verursachten Überwechsels ihrer Elemente keine Aussagen bezüglich ihrer zahlenmäßigen Größe machen kann, besitzen die Funktionen $g_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) die Eigenschaft der Isotonie.
4. Die Ausscheide- und Sterbensintensitäten seien bekannte Funktionen der Zeitvariablen. Außerdem werden sie - sowie die Bestände - als differenzierbare Funktionen ihrer Argumente vorausgesetzt.

Lemma 1.1.3.

Seien μ_{ik} die Ausscheide- und Sterbensintensitäten und p_{ik} die Überlebensintensitäten.

Beh.: Es gelten die Zusammenhänge

$$I) p_{ik}(x) = p_{ik}(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \mu_{ik}(t) dt}$$

$$II) p'_{ik}(x) = -p_{ik}(x) \cdot \mu_{ik}(x)$$

Beweis:

Beh. I) ergibt sich aus der Darstellung der Überlebensfunktion $l(x)$ durch $\mu(x)$ in kontinuierlicher Betrachtungsweise

$$l(x) = l(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \mu(t) dt}$$

und aus der Definition von $p(x) = \frac{l(x)}{l(x_0)}$. <2>

Dabei ist zwar $p_{ik}(x_0)$ normiert auf 1, wird aber als Faktor, dessen Argument die untere Integrationsgrenze bestimmt, stets mitgeschrieben.

Beh. II) erhält man sofort durch Differentiation von I) nach x .

Satz 1.1.4.

Die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Def. 1.1.1. Dann kann man aufgrund des in Abschnitt B skizzierten Schemas (*) den Zerfall in Haupt- und Nebengesamtheiten durch folgende vier Differentialgleichungen beschreiben:

$$\text{I) } \frac{df_1(x)}{dx} = -f_1(x) \cdot [\mu_{11}(x) + \mu_{12}(x) + \mu_{13}(x) + \mu_{14}(x)] \\ + f_2(x) \mu_{21}(x) + f_3(x) \mu_{31}(x) + f_4(x) \mu_{41}(x)$$

$$\text{II) } \frac{df_2(x)}{dx} = -f_2(x) \cdot [\mu_{21}(x) + \mu_{22}(x) + \mu_{23}(x) + \mu_{24}(x)] \\ + f_1(x) \mu_{12}(x) + f_3(x) \mu_{32}(x) + f_4(x) \mu_{42}(x)$$

$$\text{III) } \frac{df_3(x)}{dx} = -f_3(x) \cdot [\mu_{31}(x) + \mu_{32}(x) + \mu_{33}(x) + \mu_{34}(x)] \\ + f_1(x) \mu_{13}(x) + f_2(x) \mu_{23}(x) + f_4(x) \mu_{43}(x)$$

$$\text{IV) } \frac{df_4(x)}{dx} = -f_4(x) \cdot [\mu_{41}(x) + \mu_{42}(x) + \mu_{43}(x) + \mu_{44}(x)] \\ + f_1(x) \mu_{14}(x) + f_2(x) \mu_{24}(x) + f_3(x) \mu_{34}(x)$$

oder allgemein:

$$\frac{df_i(x)}{dx} = -f_i(x) \cdot \left[\sum_{k=1}^4 \mu_{ik}(x) \right] + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 f_k(x) \mu_{ki}(x)$$

für $i = 1, 2, 3, 4$.

Beweis:

Die zeitliche Veränderung der Gesamtheiten wird durch den Differentialquotienten, die Abgänge durch negatives, die Zugänge durch positives Vorzeichen beschrieben.

I.2. Die Überführung der Differentialgleichungen in eine Integralgleichung für die totale Personengesamtheit

Lemma 1.2.1.

Die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Def. 1.1.1.
Dann lassen sich die linearen inhomogenen Dgl.en von Satz 1.1.4. einer linearen inhomogenen Dgl. für die totale Personengesamtheit $F: = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ der Gestalt

$$F'(x) = F(x) \left[-\sum_{i=1}^4 \mu_{ii}(x) \right] + R(x)$$

zusammenfassen, wobei für das Restglied gilt:

$$R(x) := \sum_{i=1}^4 f_i(x) \cdot \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 \mu_{ik}(x) \right]$$

Beweis:

Addition der vier Dgl.en aus Satz 1.1.4. führt unter Beachtung, sich alle Intensitäten $\mu_{ik}(x)$ für $i \neq k$ wegheben, zu der Gleichung

$$(1) \quad \sum_{i=1}^4 f_i'(x) = -\sum_{i=1}^4 f_i(x) \mu_{ii}(x),$$

welche sich noch folgendermaßen umschreiben läßt:

$$(2) \quad f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + f_4'(x) = \\ [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)] \cdot [-\mu_{11}(x) - \mu_{22}(x) - \mu_{33}(x) - \mu_{44}(x) \\ + f_1(x) [\mu_{22}(x) + \mu_{33}(x) + \mu_{44}(x)] + f_2(x) [\mu_{11}(x) + \mu_{33}(x) + \mu_{44}(x) \\ + f_3(x) [\mu_{11}(x) + \mu_{22}(x) + \mu_{44}(x)] + f_4(x) [\mu_{11}(x) + \mu_{22}(x) + \mu_{33}(x)]$$

Definiert man abkürzungshalber $F: = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ und

$$R(x) := \sum_{i=1}^4 f_i(x) \cdot \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^4 \mu_{ik}(x) \right], \text{ so gilt}$$

$$(3) \quad F'(x) = F(x) \cdot \left[-\sum_{i=1}^4 \mu_{ii}(x) \right] + R(x).$$

Lemma 1.2.2.

Die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 1.2.1. Die in 1.2.1. gewonnene Dgl. (3) für die totale Personengesamtheit läßt sich in eine lineare inhomogene Integralgleichung der Gestalt

$$F(x) = \frac{P(x)}{P(x_0)} F(x_0) + P(x) \cdot \left[\sum_{i=1}^4 \int_{x_0}^x f_i(t) \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} \right] + P(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{F(t)}{P(t)} \left[-\frac{p'_{11}(t)}{p_{11}(t)} - \frac{p'_{22}(t)}{p_{22}(t)} - \frac{p'_{33}(t)}{p_{33}(t)} - \frac{p'_{44}(t)}{p_{44}(t)} \right] dt,$$

überführen, wobei $P(x) := p_{11}(x) \cdot p_{22}(x) \cdot p_{33}(x) \cdot p_{44}(x)$ gesetzt wurde.

Beweis:

Einerseits erhält man nach Division von $F(x)$ durch

$P(x) := p_{11}(x) \cdot p_{22}(x) \cdot p_{33}(x) \cdot p_{44}(x)$ und anschließender Differentiation nach x die Beziehung

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{F(x)}{P(x)} \right) = \frac{F'(x)}{P(x)} - \frac{F(x)}{P(x)} \cdot \left[\frac{p'_{11}(x)}{p_{11}(x)} + \frac{p'_{22}(x)}{p_{22}(x)} + \frac{p'_{33}(x)}{p_{33}(x)} + \frac{p'_{44}(x)}{p_{44}(x)} \right].$$

Andererseits liefert die Division der Gleichung (3) von Lemma 1.2.1. durch $P(x)$

$$(2) \quad \frac{F'(x)}{P(x)} + \frac{F(x)}{P(x)} \cdot \left[\sum_{i=1}^4 \mu_{ii}(x) \right] = \frac{R(x)}{P(x)}.$$

Vergleich von (1) und (2) führt unter Einbeziehung der Beh. II) von Lemma 1.1.3. zu

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{F(x)}{P(x)} \right) = \frac{R(x)}{P(x)} .$$

Die Integration von (3) nach t zwischen den Grenzen x_0 und x , welche wegen der Stetigkeit der vorliegenden Funktionen erlaubt ist, liefert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und anschließender Auflösung nach $F(x)$

$$(4) \quad F(x) = \frac{P(x)}{P(x_0)} \cdot F(x_0) + P(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{R(t)}{P(t)} dt .$$

Ersetzt man in (4) den Integranden durch den äquivalenten Ausdruck $\langle 3 \rangle$

$$\frac{F(t)}{P(t)} \cdot \left[-\frac{p'_{11}(t)}{p_{11}(t)} - \frac{p'_{22}(t)}{p_{22}(t)} - \frac{p'_{33}(t)}{p_{33}(t)} - \frac{p'_{44}(t)}{p_{44}(t)} \right] + \sum_{i=1}^4 \frac{f_i(t)}{P(t)} \cdot \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} ,$$

so geht die Integralgleichung (4) über in

$$(5) \quad F(x) = \frac{P(x)}{P(x_0)} F(x_0) + P(x) \cdot \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^4 f_i(t) \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} \\ + P(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{F(t)}{P(t)} \cdot \left[-\frac{p'_{11}(t)}{p_{11}(t)} - \frac{p'_{22}(t)}{p_{22}(t)} - \frac{p'_{33}(t)}{p_{33}(t)} - \frac{p'_{44}(t)}{p_{44}(t)} \right] dt ,$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Satz 1.2.3.

Die Integralgleichung (5) von Lemma 1.2.2 ist eine Volterrasche Igl.

2. Art für die totale Personengesamtheit der Form

$$\varphi(x) - \lambda \int_{x_0}^x K(x,t)\varphi(t)dt = g(x),$$

wobei $K(x,t)$ den Kern,

λ den Parameter und

$g(x)$ das freie Glied der Integralgleichung bezeichnen, mit folgenden Eigenschaften:

I) Der Kern der Igl. ist ausgeartet und hängt nur von den Überlebensintensitäten ab.

II) Für den Parameter λ gilt $\lambda = 1$.

III) Das freie Glied hat die Gestalt

$$F(x_0) + P(x_0) \cdot \left[\sum_{i=1}^4 f_i(x_0) \int_{x_0}^x \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} \right],$$

wenn man näherungsweise $\int_{x_0}^x f_i(t) \cdot \frac{\mu_{ii}(t)}{P(t)} dt$

durch $f_i(x_0) \cdot \int_{x_0}^x \frac{\mu_{ii}(t)}{P(t)} dt$ für $i = 1, 2, 3, 4$ ersetzt.

Beweis:

Ausgehend von der gewonnenen Igl. (5) von 1.2.2. wird mit dem Faktor

$\frac{P(x_0)}{P(x)}$ multipliziert, und anschließend werden folgende Definitionen

vorgenommen:

$$G(x) := \frac{P(x_0)}{P(x)} \cdot F(x)$$

$$H(x) := P(x_0) \cdot \left[\sum_{i=1}^4 \int_{x_0}^x f_i(t) \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} \right]$$

$$K(t) := - \sum_{i=1}^4 \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \cdot$$

Dann läßt sich die Igl. schreiben in der Form

$$(1) \quad G(x) = G(x_0) + H(x) + \int_{x_0}^x K(t) G(t) dt.$$

Der Summand $H(x)$ soll im folgenden näher betrachtet werden:

Die Erweiterung des 1. Mittelwertsatzes der Integralrechnung kann auf $H(x)$ angewandt werden, weil die Integrierbarkeit der stetigen Funktio-

nen f_i , p_i als auch der Quotienten $\frac{p'_{ii}}{p_{ii}}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) gewährleistet ist

und die Funktionen $\frac{p'_{ii}}{p_{ii}} = p_{ii}$ im Intervall $[x_0, x]$ nie positiv werden.

Diese Überlegungen führen zu

$$(2) \quad \int_{x_0}^x f_i(t) \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} = f_i(\xi) \cdot \int_{x_0}^x \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)},$$

wobei ξ eine Zwischenstelle im Zeitintervall $[x_0, x]$ bedeutet.

In (2) ist das rechte Integral bekannt, und die Zwischenstelle ξ wird näherungsweise durch x_0 ersetzt. Unter Beachtung von (1), (2) und des Näherungsansatzes gilt dann

$$(3) \quad G(x) - \int_{x_0}^x K(t)G(t)dt = G(x_0) + H(x) \quad ,$$

$$\text{mit } H(x) \approx P(x_0) \cdot \left[\sum_{i=1}^4 f_i(x_0) \int_{x_0}^x \frac{p'_{ii}(t)}{p_{ii}(t)} \frac{dt}{P(t)} \right] .$$

(3) ist die gesuchte Volterrasche Igl. 2. Art für die Funktion $G(x)$, die - bis auf einen positiven Faktor - mit der totalen Personengesamtheit $F(x)$ übereinstimmt. Zusammen mit nachfolgender Definition 1.2.4. sieht man, daß (3) trivialerweise den Bedingungen I) bis III) genügt.

Definition 1.2.4.

Der Kern $K(x,t)$ einer Igl. heißt ausgeartet, wenn er sich als endliche Summe von Produkten zweier Funktionen darstellen läßt, wobei die eine Funktion nur von x und die andere nur von t abhängt.

Bemerkung 1.2.5.

1. Da die Personenbestände f_i ($i = 1,2,3,4$) einem steten Wandel bezüglich ihres Umfanges unterworfen sind und zahlenmäßig zu- als auch abnehmen können, begeht man in (2) von Satz 1.2.3. keine gravierende Ungenauigkeit, wenn man alle $f_i(\xi)$ durch die bekannten und teils zu großen, teils zu kleinen Anfangsbestände $f_i(x_0)$ ersetzt, welche nach Bem. 1.1.2. Teil 2 nicht notwendigerweise verschwinden.
2. Bei einem genügend großen Bestand kann man sogar o.B.d.A. davon ausgehen, daß sämtliche Nebengesamtheiten zum Anfangszeitpunkt x_0 nicht leer sind. Da diese Gesamtheiten ständig Zu- und Abgänge verzeichnen wird sich der Fehler beim Verlegen von ξ auf den linken Randpunkt

des Integrationsintervalls $[x_0, x]$ im Mittel ungefähr aufheben. Der dabei auftretende Approximationsfehler ist von untergeordneter Bedeutung.

3. Nach den vorangegangenen Überlegungen enthält die Volterrasche Igl. (3) von Satz 1.2.3 - bis auf die Funktion $G(x)$ - nur bekannte Größen und kann mit den Mitteln der Theorie der Integralgleichungen nach $G(x)$ gelöst werden. Die Lösungsmethoden schließen sich nicht sofort, sondern erst im Abschnitt D an.
4. Der nachfolgende Paragraph führt zu dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit: die Ermittlung der einzelnen Bestände zu jedem Zeitpunkt x . Dabei wird die Lösung der hergeleiteten Volterraschen Integralgleichung als bekannt vorausgesetzt. Ein Beweis für die Existenz und Konstruktion dieser Lösung wird im Kapitel VI nachgeholt.

I.3. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Personenbestände

Bemerkung 1.3.1.

Hat man in (3) von Satz 1.2.3. die Lösung konstruktiv nach Kapitel D VI (Hauptsatz 6.1.2) gewonnen, so kennt man gleichzeitig wegen der

Beziehung $G(x) = \frac{P(x_0)}{P(x)} \cdot F(x)$ auch die totale Personengesamtheit

$$\sum_{i=1}^4 f_i(x).$$

Ziel dieses 3. Paragraphen wird die Herleitung der Volterraschen Igl.en für die Bestände f_i sein ($i = 1, 2, 3, 4$).

Definition 1.3.2.

Die Summenfunktionen S_1 und S_4 seien definiert durch

$$S_1(x) := f_1(x) + f_2(x) \text{ und}$$

$$S_4(x) := f_3(x) + f_4(x) \text{ in jedem Zeitpunkt } x \geq x_0.$$

Satz 1.3.3.

Die vier das Zerfallsschema (*) beschreibenden Dgl.en von Satz 1.1.4. lassen sich einheitlich ausdrücken durch die lineare inhomogene Dgl.

$$\begin{aligned} \frac{df_i(x)}{dx} &= a_i(x)f_i(x) + b_i(x) S_s(x) + c_i(x)f_{s+3w}(x) \\ &+ d_i(x) F(x) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

wobei gilt:

- I) $a_i(x), b_i(x), c_i(x), d_i(x)$ sind geeignet gewählte Koeffizientenfunktionen der Ausscheideintensitäten,
 II) die Indizes genügen den Bedingungen:

$$s = \begin{cases} 1 & \text{für } i=1,2 \\ 4 & \text{für } i=3,4 \end{cases} \text{ und } w = \begin{cases} 1 & \text{für } i=1,2 \\ -1 & \text{für } i=3,4 \end{cases}.$$

Beweis:

Mit vorangegangener Definition lassen sich die ersten beiden Dgl.en von Satz 1.1.4. überführen in

$$\begin{aligned} \text{I')} \quad \frac{df_1(x)}{dx} &= -f_1(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{1n}(x) \right] + \mu_{21}(x) \cdot [S_1(x) - f_1(x)] \\ &\quad + \mu_{31}(x) \cdot [F(x) - S_1(x) - f_4(x)] + \mu_{41}(x) f_4(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II')} \quad \frac{df_2(x)}{dx} &= -f_2(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{2n}(x) \right] + \mu_{12}(x) \cdot [S_1(x) - f_2(x)] \\ &\quad + \mu_{32}(x) \cdot [F(x) - S_1(x) - f_4(x)] + \mu_{42}(x) f_4(x). \end{aligned}$$

Die Analogie von I') und II') kann noch betont werden durch

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{df_i(x)}{dx} &= -f_i(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{in}(x) + \mu_{ji}(x) [S_1(x) - f_i(x)] \right] \\ &\quad + \mu_{3i}(x) \cdot [F(x) - S_1(x) - f_4(x)] + \mu_{4i}(x) f_4(x), \end{aligned}$$

wobei i die Werte 1 und 2 annimmt und $j = \begin{cases} 1 & \text{für } i=2 \\ 2 & \text{für } i=1 \end{cases}$ gilt.

Um die Analogie zu (1) für die beiden anderen Dgl.en

$$\text{III}') \quad \frac{df_3(x)}{dx} = -f_3(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{3n}(x) \right] + \mu_{13}(x) f_1(x) \\ + \mu_{23}(x) \cdot [F(x) - S_4(x) - f_1(x)] + \mu_{43}(x) [S_4(x) - f_3(x)]$$

und

$$\text{IV}') \quad \frac{df_4(x)}{dx} = -f_4(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{4n}(x) \right] + \mu_{14}(x) f_1(x) \\ + \mu_{24}(x) \cdot [F(x) - S_4(x) - f_1(x)] + \mu_{34}(x) [S_4(x) - f_4(x)]$$

herzustellen, werden die jeweiligen Summen auf der rechten Seite in der Reihenfolge 1., 4., 3., 2. Summand geschrieben:

$$(2) \quad \frac{df_i(x)}{dx} = -f_i(x) \cdot \left[\sum_{n=1}^4 \mu_{in}(x) \right] + \mu_{ji}(x) \cdot [S_4(x) - f_i(x)] \\ + \mu_{2i}(x) \cdot [F(x) - S_4(x) - f_1(x)] + \mu_{1i}(x) f_1(x) ,$$

wobei i die Werte 3 und 4 annimmt und $j = \begin{cases} 3 & \text{für } i=4 \\ 4 & \text{für } i=3 \end{cases}$ gilt.

Definiert man abkürzungshalber $\mu_i(x) := \sum_{n=1}^4 \mu_{in}(x)$ für $i = 1, 2, 3, 4$,

so lassen sich (1) und (2) noch zu (3) bzw. zu (4) zusammenfassen, wenn man setzt:

$$v = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, 3 \\ -1 & \text{für } i = 2, 4 \end{cases} ,$$

$$s = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, 2 \\ 4 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases} ,$$

$$t = \begin{cases} 3 & \text{für } i = 1, 2 \\ 2 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases} ,$$

$$r = \begin{cases} 4 & \text{für } i = 1, 2 \\ 1 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases}$$

$$(3) \frac{df_i(x)}{dx} = -f_i(x) \mu_i(x) + \mu_{i+v,i}(x) \cdot [S_s(x) - f_i(x)] \\ + \mu_{t,i}(x) \cdot [F(x) - S_s(x) - f_r(x)] + \mu_{r,i}(x) f_r(x)$$

für $i = 1, 2, 3, 4$;

$$(4) \frac{df_i(x)}{dx} = -f_i(x) \mu_i(x) + \mu_{i+v,i}(x) \cdot [S_s(x) - f_i(x)] \\ + \mu_{s+2w,i}(x) \cdot [F(x) - S_s(x) - f_{s+3w}(x)] + \\ + \mu_{s+3w,i}(x) f_{s+3w}(x) .$$

Man bestätigt die Richtigkeit von (4), da mit $w = \begin{cases} 1 & \text{für } 1, 2 \\ -1 & \text{für } 3, 4 \end{cases}$ die Parameter t und r übergeben in

$$t = s+2w = \begin{cases} 3 & \text{für } i = 1, 2 \\ 2 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$r = s+3w = \begin{cases} 4 & \text{für } i = 1, 2 \\ 1 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases} .$$

Also sind in der Dgl. (4) an Personenbeständen die Funktionen f_i , S_s , F und f_{s+3w} enthalten.

Ordnen nach diesen Funktionen ergibt für $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{df_i(x)}{dx} = & -f_i(x) [\mu_i(x) + \mu_{i+v,i}(x)] \\
 & + S_s(x) [\mu_{i+v,i}(x) - \mu_{s+2w,i}(x)] \\
 & + f_{s+3w}(x) \cdot [\mu_{s+3w,i}(x) - \mu_{s+2w,i}(x)] \\
 & + F(x) \cdot \mu_{s+2w,i}(x)
 \end{aligned}$$

bzw. liefert die Behauptung, wenn man noch die Koeffizientenfunktionen ansetzt für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
 a_i(x) &:= -\mu_i(x) - \mu_{i+v,i}(x) \\
 b_i(x) &:= \mu_{i+v,i}(x) - \mu_{s+2w,i}(x) \\
 c_i(x) &:= \mu_{s+3w,i}(x) - \mu_{s+2w,i}(x) \\
 d_i(x) &:= \mu_{s+2w,i}(x) .
 \end{aligned}$$

Bemerkung 1.3.4.

Der Beweis des folgenden Satzes 1.3.5. wird sich auf Aussagen über die Hauptgesamtheit f_1 beschränken. Wie man analoge Beweistechniken für die Nebengesamtheiten anwendet, beschreibt die anschließende Bem. 1.3.6.

Satz 1.3.5.

Die Dgl. (5) von Satz 1.3.3. läßt sich für $i = 1$ in eine lineare inhomogene Volterrasche Igl. 2. Art für $g_1(x) := \frac{p_1(x_0)}{p_1(x)} f_1(x)$ der Gestalt

$$g_1(x) - \int_{x_0}^x k(t) g_1(t) dt = g_1(x_0) + h(x)$$

transformieren.

Die dabei auftretenden Funktionen h und k werden durch die Gleichungen (5) des Beweises und p_1 durch (1) erklärt.

Beweis:

Definiert man $p_i(x)$ durch

$$(1) \frac{p_i(x)}{p_i(x_0)} := e^{-\int_{x_0}^x \mu_i(t) dt} \quad \text{mit } \mu_i(t) := \sum_{n=1}^4 \mu_{in}(t),$$

setzt in die Ableitung von $\frac{f_i(x)}{p_i(x)}$ die gewonnene Dgl. (5) von 1.3.3. ein und

addiert auf beiden Seiten der Gleichung noch $\frac{\mu_{i+v,i}(x)}{p_i(x)} \cdot f_i(x)$, so

erhält man für $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{d}{dx} \left(\frac{f_i(x)}{p_i(x)} \right) + \frac{\mu_{i+v,i}(x)}{p_i(x)} f_i(x) \\ &= \frac{f_i'(x)}{p_i(x)} - \frac{f_i(x) p_i'(x)}{p_i^2(x)} + f_i(x) \frac{\mu_{i+v,i}(x)}{p_i(x)} \\ &= \frac{1}{p_i(x)} \cdot [b_i(x) S_S(x) + c_i(x) f_{s+3w}(x) + d_i(x) F(x)] , \end{aligned}$$

da sich der Summand von f_i wegen

$$a_i(x) = \frac{p_i'(x)}{p_i(x)} - \mu_{i+v,i}(x)$$

gerade weghebt.

Integration dieser Dgl. nach t zwischen den Grenzen x_0 und x führt nach Auflösung nach $f_i(x)$ zu

$$(3) \quad f_i(x) = p_i(x) \cdot \frac{f_i(x_0)}{p_i(x_0)} - p_i(x) \int_{x_0}^x f_i(t) \frac{\mu_{i+v,i}(t)}{p_i(t)} dt \\ + p_i(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{p_i(t)} \cdot [b_i(t)S_s(t) + c_i(t)f_{s+3w}(t) + d_i(t)F(t)] dt.$$

Speziell für $i=1$ erhält man die Igl. für f_1 - da $S_1 = f_1 + f_2$ -

$$(4) \quad f_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_1(x_0)} f_1(x_0) - p_1(x) \cdot \int_{x_0}^x f_1(t) \cdot \left[\frac{\mu_{21}(t) - b_1(t)}{p_1(t)} \right] dt \\ + p_1(x) \left[\int_{x_0}^x \frac{b_1(t)}{p_1(t)} f_2(t) dt + \int_{x_0}^x \frac{c_1(t)}{p_1(t)} f_4(t) dt + \int_{x_0}^x \frac{d_1(t)}{p_1(t)} F(t) dt \right],$$

in der für die Integranden von f_2 und f_4 die im Paragraphen I.2.

vorgenommene Näherung wiederholt und anschließend mit $\frac{p_1(x_0)}{p_1(x)}$

multipliziert wird. Setzt man noch

$$(5) \quad g_1(x) := \frac{p_1(x_0)}{p_1(x)} \cdot f_1(x),$$

$$(5) \quad h(x) := p_1(x_0) \left[f_2(x_0) \cdot \int_{x_0}^x \frac{b_1(t)}{p_1(t)} dt + f_4(x_0) \cdot \int_{x_0}^x \frac{c_1(t)}{p_1(t)} dt + \int_{x_0}^x \frac{d_1(t)}{p_1(t)} F(t) dt \right]$$

$$k(t) := b_1(t) - \mu_{21}(t),$$

so geht (4) über in die gewünschte Volterrasche Igl.

$$(6) \quad g_1(x) - \int_{x_0}^x k(t) g_1(t) dt = g_1(x_0) + h(x).$$

Bemerkung 1.3.6.

1. Analog (3) von Satz 1.3.5. stellt man die Igl.en für die Nebengesamtheiten her, in denen man für

$i = 2$ die Näherung für die Integranden f_1, f_4

$i = 3$ die Näherung für die Integranden f_1, f_4

$i = 4$ die Näherung für die Integranden f_1, f_3

vorzunehmen hat bzw. die in Satz 1.3.5. ermittelte Hauptgesamtheit f_1 jeweils einsetzt und nur eine Näherung zuläßt.

2. Damit ist die zeitliche Bestimmung der einzelnen Bestandsumfänge zurückgeführt worden auf insgesamt fünf Volterrasche Igl.en 2. Art, nämlich auf (3) von Satz 1.2.3. und auf die zu (6) von Satz 1.3.5. analogen Igl.en für die Gesamtheiten 1, 2, 3 und 4.

II 2. Ansatz mit Näherungsgleichung

II.1. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Bestände direkt aus den Differentialgleichungen des Systems

Bemerkung 2.1.1.

Nachdem der 1. Ansatz - ausgehend von Dgl.en - zunächst zu einer Igl. für die Summenfunktion F geführt hat, soll im 2. Ansatz dieser Umweg vermieden und sofort eine Beziehung zwischen den Dgl.en und den Igl.en für die einzelnen Bestände hergestellt werden. Dabei wird eine dem 1. Ansatz ähnliche und deshalb akzeptable Näherung eingehen.

Definition 2.1.2.

I) Die Summe aller Ausscheideintensitäten aus einer Gesamtheit f_i werde mit μ_i bezeichnet, so daß für alle $x \geq x_0$ gilt:

$$\mu_i(x) = \sum_{k=1}^4 \mu_{ik}(x) \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

II) Ferner seien die Überlebensfunktionen p_i definiert durch

$$\frac{p_i(x)}{p_i(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^x \mu_i(t) dt}, \quad \forall x \geq x_0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei μ_i wie in I) erklärt ist.

Satz 2.1.3.

Die Dgl.en des Zerfallsschemas (*) führen direkt auf Volterrasche Igl.en 2. Art für die einzelnen Bestände f_i . Für $i = 1$ lautet die Igl.

$$g_1(x) - \int_{x_0}^x K_1(s) g_1(s) ds = g_1(x_0) + h_1(x),$$

wobei f_1 aus g_1 durch die Beziehung $f_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_1(x_0)} g_1(x)$ hervorgeht

und der Kern und das freie Glied wie in (8), (9) und (11) dieses Satzes definiert sind.

Die Resultate für $i = 2, 3, 4$ lassen sich völlig analog gewinnen.

Beweis:

Der Beweis wird o.B.d.A. nur für $i = 1$ ausgeführt und läßt sich völlig analog auf die Nebengesamtheiten f_i ($i = 2, 3, 4$) übertragen.

Division von f_1 durch p_1 und anschließende Differentiation nach x liefert - nach Einsetzen der Dgl. I) von Satz 1.1.4. - für f_1

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{f_1(x)}{p_1(x)} \right) &= \frac{f_1'(x)}{p_1(x)} - \frac{f_1(x) p_1'(x)}{p_1^2(x)} \\ &= \frac{1}{p_1(x)} \cdot \{ f_1(x) \cdot [-\mu_1(x) - \frac{p_1'(x)}{p_1(x)}] + f_2(x) \mu_{21}(x) \\ &\quad + f_3(x) \mu_{31}(x) + f_4(x) \mu_{41}(x) \}. \end{aligned}$$

In (1) fällt dabei der Koeffizient von $f_1(x)$ aufgrund der Definition von p_1 gerade weg, so daß auf der rechten Seite nur die Nebengesamtheiten stehenbleiben:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{f_1(x)}{p_1(x)} \right) = \frac{1}{p_1(x)} \cdot [f_2(x) \mu_{21}(x) + f_3(x) \mu_{31}(x) + f_4(x) \mu_{41}(x)].$$

Die Integration nach t von x_0 bis x überführt (2) in

$$(3) f_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_1(x_0)} f_1(x_0) + \\ + p_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot [f_2(t) \mu_{21}(t) + f_3(t) \mu_{31}(t) + f_4(t) \mu_{41}(t)] dt.$$

Ziel ist es, die Funktionen im Integranden teilweise durch f_1 auszu-
drücken, um zu einer linearen Igl. für f_1 zu gelangen. Dazu werden die
einzelnen Summanden unter dem Integral genauer untersucht.

Wendet man den Formelapparat (1) bis (3) auf $i = 2, 3, 4$ an und
multipliziert mit den entsprechenden Intensitäten, so erhält man die
folgenden drei Igl.en:

$$(4) f_2(t) \mu_{21}(t) = \mu_{21}(t) \cdot \left\{ \frac{p_2(t)}{p_2(x_0)} \cdot f_2(x_0) + p_2(t) \cdot \int_{x_0}^t \frac{1}{p_2(s)} \cdot [f_1(s) \mu_{12}(s) + \right. \\ \left. f_3(s) \mu_{32}(s) + f_4(s) \mu_{42}(s)] ds \right\},$$

$$(5) f_3(t) \mu_{31}(t) = \mu_{31}(t) \cdot \left\{ \frac{p_3(t)}{p_3(x_0)} \cdot f_3(x_0) + p_3(t) \cdot \int_{x_0}^t \frac{1}{p_3(s)} \cdot [f_1(s) \mu_{13}(s) + \right. \\ \left. f_2(s) \mu_{23}(s) + f_4(s) \mu_{43}(s)] ds \right\},$$

$$(6) f_4(t) \mu_{41}(t) = \mu_{41}(t) \cdot \left\{ \frac{p_4(t)}{p_4(x_0)} \cdot f_4(x_0) + p_4(t) \cdot \int_{x_0}^t \frac{1}{p_4(s)} \cdot [f_1(s) \mu_{14}(s) + \right. \\ \left. f_2(s) \mu_{24}(s) + f_3(s) \mu_{34}(s)] ds \right\}.$$

Addiert man die Igl.en (4) bis (6) und setzt ihre Summe in (3) als Integrand ein, so geht (3) über in

$$\begin{aligned}
 (7) \quad f_1(x) &= \frac{p_1(x)}{p_1(x_0)} f_1(x_0) + p_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \mu_{k1}(t) \frac{p_k(t)}{p_k(x_0)} f_k(x_0) \right] dt \\
 &+ p_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \mu_{k1}(t) p_k(t) \cdot \int_{x_0}^t \frac{1}{p_k(s)} \mu_{1k}(s) f_1(s) ds \right] dt \\
 &+ p_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \int_{x_0}^t A_k(s) f_k(s) ds \right] dt,
 \end{aligned}$$

wobei in (7) die Abkürzungen

$$(8) \quad A_2(s) := \mu_{31}(t) \frac{p_3(t)}{p_3(s)} \mu_{23}(s) + \mu_{41}(t) \frac{p_4(t)}{p_4(s)} \mu_{24}(s)$$

$$A_3(s) := \mu_{21}(t) \frac{p_2(t)}{p_2(s)} \mu_{32}(s) + \mu_{41}(t) \frac{p_4(t)}{p_4(s)} \mu_{34}(s)$$

$$A_4(s) := \mu_{21}(t) \frac{p_2(t)}{p_2(s)} \mu_{42}(s) + \mu_{31}(t) \frac{p_3(t)}{p_3(s)} \mu_{43}(s)$$

vorgenommen wurden.

Auf den auf der rechten Seite stehenden Term mit $f_1(s)$ in (7) wendet man die Dirichlet-Formel^{<5>} an und erhält

$$(9) \quad \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \mu_{k1}(t) p_k(t) \cdot \int_{x_0}^t \frac{1}{p_k(s)} \mu_{1k}(s) f_1(s) ds \right] dt$$

$$= \int_{x_0}^x A_1(s) f_1(s) ds \quad \text{mit}$$

$$A_1(s) := \sum_{k=2}^4 \frac{1}{p_k(s)} \mu_{1k}(s) \left[\int_s^x \frac{p_k(t)}{p_1(t)} \mu_{k1}(t) dt \right];$$

während für den letzten Term von (7) die im Ansatz I.2. erläuterte Näherung auf die Nebengesamtheiten übertragen wird, so daß schließlich (7) die Darstellung (10) erhält:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad f_1(x) = & \frac{p_1(x)}{p_1(x_0)} f_1(x_0) + p_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \mu_{k1}(t) \frac{p_k(t)}{p_k(x_0)} f_k(x_0) \right] dt \\
 & + p_1(x) \cdot \int_{x_0}^x A_1(s) f_1(s) ds \\
 & + p_1(x) \cdot \left\{ \sum_{k=2}^4 f_k(x_0) \cdot \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \left[\int_{x_0}^t A_k(s) ds \right] dt \right\}.
 \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit dem Faktor $\frac{p_1(x_0)}{p_1(x)}$ und mit den folgenden Definitionen

$$(11) \quad g_1(x) := \frac{p_1(x_0)}{p_1(x)} \cdot f_1(x)$$

$$\begin{aligned}
 h_1(x) := & p_1(x_0) \left\{ \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \cdot \left[\sum_{k=2}^4 \mu_{k1}(t) \frac{p_k(t)}{p_k(x_0)} f_k(x_0) \right] dt \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^4 f_k(x_0) \cdot \int_{x_0}^x \frac{1}{p_1(t)} \left[\int_{x_0}^t A_k(s) ds \right] dt \right\}
 \end{aligned}$$

$$K_1(s) := p_1(s) \cdot A_1(s)$$

gelangt man schließlich zur gewünschten Volterraschen Igl. 2. Art

$$(12) \quad g_1(x) - \int_{x_0}^x K_1(s) g_1(s) ds = g_1(x_0) + h_1(x).$$

III. 3. Ansatz mit Integralgleichungssystemen

III.1. Die Bestimmung der einzelnen Bestände durch Überführen eines Systems von Fredholmschen Integralgleichungen in eine einzige

Bemerkung 3.1.1.

Das Charakteristikum dieses Kapitels III ist der Fortfall einer Näherungsgleichung. Das folgende Kapitel stellt den 3. Ansatz, der zur Lösung des Problems (*) herangezogen werden kann, vor, indem von einem System Volterrascher Igl.en ausgegangen und dieses in eine einzige Igl. überführt wird.

Satz 3.1.2.

Die Dgl.en des Zerfallsschemas (*) lassen sich in ein äquivalentes System von Volterraschen Igl.en 2. Art transformieren.

Beweis:

Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man die Dgl.en I) bis IV) von Satz 1.1.4. nach t zwischen den Grenzen x_0 bis x integriert und so zum System der Igl.en gelangt:

$$I) \quad f_1(x) - \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^x K_{1k}(t) f_k(t) dt = f_1(x_0)$$

$$(1) \quad \text{mit } K_{11}(t) = -\sum_{k=1}^4 \mu_{1k}(t); K_{1k}(t) = \mu_{k1}(t) \text{ für } k=2,3,4$$

$$II) \quad f_2(x) - \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^x K_{2k}(t) f_k(t) dt = f_2(x_0)$$

$$\text{mit } K_{22}(t) = -\sum_{k=1}^4 \mu_{2k}(t); K_{2k}(t) = \mu_{k2}(t) \text{ für } k=1,3,4$$

$$\text{III) } f_3(x) - \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^x K_{3k}(t) f_k(t) dt = f_3(x_0)$$

$$(1) \quad \text{mit } K_{33}(t) := - \sum_{k=1}^4 \mu_{3k}(t); K_{3k}(t) := \mu_{k3}(t) \text{ für } k=1,2,4$$

$$\text{IV) } f_4(x) - \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^x K_{4k}(t) f_k(t) dt = f_4(x_0)$$

$$\text{mit } K_{44}(t) := - \sum_{k=1}^4 \mu_{4k}(t); K_{4k}(t) := \mu_{k4}(t) \text{ für } k=1,2,3.$$

Bemerkung 3.1.3.

Ein System von Volterraschen Igl.en läßt sich auf zwei Arten in eine einzige Igl. überführen, wie in den Sätzen 3.1.4. und 3.2.2. hergeleitet wird. Da die Volterrasche Igl. als spezielle Fredholmsche Igl. mit einer Zusatzbedingung an den Kern interpretiert werden kann ^{<6>}, gilt für sie das Folgende.

Eine erste Möglichkeit wird aufgezeigt in

Satz 3.1.4.

Ein System von Fredholmschen Igl.en 2. Art läßt sich in eine einzige Fredholmsche Igl. 2. Art verwandeln.

Beweis:

Der Beweis stützt sich auf die Ideen in [5] und [11], wird auf die durch das Zerfallsschema (*) hervorgerufene Problemstellung modifiziert und geht von den vier, in Satz 3.1.2. direkt hergeleiteten Igl.en aus.

Das System von Igl.en mit ausgearteten Kernen laute:

$$(1) f_i(x) = \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^{x_1} K_{ik}(t) f_k(t) dt + f_i(x_0) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei $[x_0, x_1]$ ein beliebiges, aber festes endliches, $[x_0, x]$ enthaltendes Zeitintervall bedeutet. Ziel ist es, die unbekannten Funktionen f_i , definiert auf $[x_0, x_1]$, und die bekannten Kerne K_{ik} , definiert auf demselben Intervall, durch Funktionen zu ersetzen, die auf dem Intervall vierfacher Größe, $[x_0, x_0 + 4(x_1 - x_0)]$, existieren.

Dazu werden zunächst die Kerne durch die Festsetzungen

$$(2) \bar{K}_{ik}: [x_0, x_1] \times [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longrightarrow \bar{K}_{ik}(x, t) := K_{ik}(t) \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3, 4$$

von Funktionen einer Variablen auf zwei Variable erweitert.

Mit (2) ist das Igl.system

$$(3) f_i(x) = \sum_{k=1}^4 \int_{x_0}^{x_1} \bar{K}_{ik}(x, t) f_k(t) dt + f_i(x_0) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

äquivalent zum System (1).

Nun setzt man für

$$x \in [x_0 + (i-1)(x_1 - x_0), x_0 + i(x_1 - x_0))$$

$$\text{und } t \in [x_0 + (k-1)(x_1 - x_0), x_0 + k(x_1 - x_0))$$

$$f(x) := f_i(x - (i-1)(x_1 - x_0)) ,$$

$$(4) \quad \bar{K}(x, t) := \bar{K}_{ik}(x - (i-1)(x_1 - x_0) , t - (k-1)(x_1 - x_0)) ,$$

$$g(x) := f_i(x_0) ,$$

für $i, k = 1, 2, 3, 4$.

Mit diesen Definitionen läßt sich das System (3) in eine einzige Fredholmsche Igl. 2. Art der Gestalt

$$(5) \quad f(x) - \int_{x_0}^{x_0 + 4(x_1 - x_0)} \bar{K}(x, t) f(t) dt = g(x)$$

umwandeln.

Bemerkung 3.1.5.

1. Durch diese in Satz 3.1.4. vorgenommene Überführung in eine einzige Igl. übertragen sich Eigenschaften der Funktionen f_i bzw. K_{ik} auf f bzw. $\bar{K}$. Solche Eigenschaften können z.B. Integrierbarkeit oder Abschätzbarkeit betreffen.
2. Ist die Lösungsfunktion f von (5) im vorausgegangenen Satz mit den Mitteln der Theorie der Igl.en gewonnen, so hat man damit wegen (4) auch das in der Einleitung erläuterte Ziel, die Bestimmung der einzelnen Umfänge, erreicht.
3. Anders dagegen verhält es sich mit der in Bem. 3.1.3. angekündigten zweiten Möglichkeit, die das Thema des folgenden Paragraphen ausschöpft. Es wird sich dort herausstellen, daß die Bestände nicht selbst ermittelt, sondern nur abgeschätzt werden können. Der Vollständigkeit halber soll aber auch dieser Ansatz vorgeführt werden ([9]).

III.2. Die Abschätzung der einzelnen Bestände durch Überführen eines Systems von Volterraschen Integralgleichungen in eine einzige

Definition 3.2.1.

I) Der zum Integralgleichungskern K gehörende Integral - Operator vom Volterraschen Typ, $\mathcal{R}$, ist definiert durch

$$(\mathcal{R}(f(\cdot)))(x) := \int_{x_0}^x K(t)f(t)dt^{<7>}$$

II) Die quadratische Matrix der in Satz 3.1.2. auftretenden Kernfunktionen der Igl.en I) bis IV)

$$\begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) & K_{13}(t) & K_{14}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) & K_{23}(t) & K_{24}(t) \\ K_{31}(t) & K_{32}(t) & K_{33}(t) & K_{34}(t) \\ K_{41}(t) & K_{42}(t) & K_{43}(t) & K_{44}(t) \end{pmatrix}$$

heißt die Kernmatrix oder kurz der Kern des Igl.systems.

III) Die zugehörige Matrix, gebildet aus den entsprechenden Integral - Operatoren $\mathcal{R}_{ik}$ ($i,k = 1,2,3,4$), heißt Operatorenmatrix

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} & \mathcal{R}_{14} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} & \mathcal{R}_{24} \\ \mathcal{R}_{31} & \mathcal{R}_{32} & \mathcal{R}_{33} & \mathcal{R}_{34} \\ \mathcal{R}_{41} & \mathcal{R}_{42} & \mathcal{R}_{43} & \mathcal{R}_{44} \end{pmatrix} .$$

Satz 3.2.2.

Das System (1) der Volterraschen Igl.en aus Satz 3.1.2. läßt sich in eine einzige Volterrasche Igl. 2. Art $f(x) - \mathcal{R}f(x) = f(x_0)$ überführen, wobei das Funktionensystem f durch f_1, f_2, f_3, f_4 und $\mathcal{R}$ durch Teil III) der vorangegangenen Definition bestimmt sind.

Beweis:

Der Beweis bedient sich - im Gegensatz zum Paragraphen III.1. - der Matrizen Schreibweise. Mit Hilfe der Operatoren Schreibweise aus Def. 3.2.1. Teil I) kann das System (1) von 3.1.2. überführt werden in

$$(1) \quad f_i(x) - \sum_{l=1}^4 \mathcal{R}_{il} f_l(x) = f_i(x_0) ,$$

wenn man unter $\mathcal{R}_{il}$ den zu K_{il} gehörenden Integral-Operator versteht. Die Elemente der Operatorenmatrix $\mathcal{R}$ sind nach Def. 3.2.1. Teil III) die Integral-Operatoren. Entsprechend soll die Matrizen symbolik auf die Funktionen f_i erweitert werden. Mit f bezeichne man die Spalte

$$(2) \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} .$$

In dieser Schreibweise besagt (1) nichts anderes, als daß die Matrizen Gleichung

$$(3) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^4 R_{1l} f_l(x) \\ : \\ \sum_{l=1}^4 R_{4l} f_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ f_3(x_0) \\ f_4(x_0) \end{pmatrix},$$

die nach den Regeln der Matrizenmultiplikation äquivalent ist zu

$$(3') \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ f_3(x_0) \\ f_4(x_0) \end{pmatrix},$$

bzw. daß die Operatorengleichung

$$(3'') f(x) - Rf(x) = f(x_0)$$

gilt.

In (3'') ist es durch den Integral-Operator gelungen, das System (1) formal auf die Gestalt einer einzigen Volterraschen Igl. 2. Art zu bringen, die nach den Regeln der Theorie der Igl.en gelöst werden kann.

Bemerkung 3.2.3.

Mit der Lösung von (3'') kann man noch keine Schlüsse auf die einzelnen Bestände ziehen. In den Kapiteln I und II kam an der entsprechenden Stelle die Näherung zum Zuge. Hier wird eine andere Technik eine Rolle

spielen: Die einzelnen Personengesamtheiten können zwar in III.2. nicht ermittelt, wenigstens aber nach oben hin abgeschätzt werden. Dagegen lieferte die erste Möglichkeit der Zurückführung auf eine Igl. in III.1. bereits an dieser Stelle das gewünschte Ergebnis.

Definition 3.2.4.

Die Norm eines Funktionensystems f , bestehend aus f_1, f_2, f_3, f_4 , wird definiert durch

$$Nf(x) := \sum_{l=1}^4 [f_l(x)]^2.$$

Lemma 3.2.5.

Die Norm des in (3'') aus Satz 3.2.2. auftretenden Funktionensystems $Rf(x)$ kann nach oben abgeschätzt werden durch

$$NRf(x) \leq (x_1 - x_0) \cdot ! Nf(x),$$

wobei $!$ der dem Kern K aus (5) dieses Lemmas entsprechende Integral-Operator und $[x_0, x_1]$ ein festes, endliches, $[x_0, x]$ umfassendes Zeitintervall sind.

Beweis:

Die Norm von $Rf(x) =$

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{l=1}^4 R_{1l} f_l(x) \\ : \\ \sum_{l=1}^4 R_{4l} f_l(x) \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{1l}(t) f_l(t) dt \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{4l}(t) f_l(t) dt \end{pmatrix}$$

lautet nach Def. 3.2.4.

$$(1) \text{NRf}(x) = \left[\sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{1l}(t) f_l(t) dt \right]^2 + \dots + \left[\sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{4l}(t) f_l(t) dt \right]^2.$$

Die im folgenden benötigte Abschätzungsformel der Integralrechnung

$$(2) \left[\int_{x_0}^x h(t) dt \right]^2 \leq (x-x_0) \cdot \int_{x_0}^x [h(t)]^2 dt$$

beweist man leicht durch Verwendung von Doppelintegralen und Ausnutzung der binomischen Formeln, oder durch einen Mittelwertsatz für Systeme von Integralen. Wendet man die Abschätzungsformel (2) auf die Funktionen

$$h(t) := \sum_{l=1}^4 K_{il}(t) f_l(t) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

aus (1) an, so gewinnt man die Schranke

$$(3) \text{NRf}(x) \leq (x-x_0) \cdot \int_{x_0}^x \left[\sum_{l=1}^4 K_{1l}(t) f_l(t) \right]^2 dt + \dots + (x-x_0) \cdot \int_{x_0}^x \left[\sum_{l=1}^4 K_{4l}(t) f_l(t) \right]^2 dt,$$

ie mit Hilfe der Lagrange - Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^4 a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^4 b_i^2 \right)$$

och vergrößert wird:

$$\begin{aligned} (4) \quad Nf(x) &\leq (x-x_0) \left\{ \int_{x_0}^x \left[\sum_{l=1}^4 K_{1l}(t)^2 \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^4 f_l(t)^2 \right] dt \right\} + \dots + \\ &+ (x-x_0) \left\{ \int_{x_0}^x \left[\sum_{l=1}^4 K_{4l}(t)^2 \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^4 f_l(t)^2 \right] dt \right\} \\ &= (x-x_0) \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^4 \left\{ \left[\sum_{l=1}^4 K_{il}(t)^2 \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^4 f_l(t)^2 \right] \right\} dt . \end{aligned}$$

etzt man abkürzungshalber noch

$$(5) \quad K(t) := \sum_{i=1}^4 \left[\sum_{l=1}^4 K_{il}(t)^2 \right] ,$$

o wird aus Ungleichung (4) zusammen mit Def. 3.2.4

$$(6) \quad Nf(x) \leq (x-x_0) \int_{x_0}^x K(t) Nf(t) dt$$

zw. (6') $Nf(x) \leq (x_1-x_0) \cdot ! Nf(x) .$

n (6') bezeichnet ! den zu K aus (5) gehörenden Integral-Operator,
nd das Zeitintervall $[x_0, x]$ wurde durch ein endliches, größeres
ntervall $[x_0, x_1]$, das unabhängig von der oberen Integrationsgrenze
st, ersetzt.

Satz 3.2.6.

Die Lösung von $f(x) - \mathfrak{R}f(x) = f(x_0)$ wird durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}^i f(x_0)$$

gegeben und ist eindeutig.

Beweis:

Wiederholte Anwendung des Integral-Operators $\mathfrak{R}$ auf Gleichung (3'') in Satz 3.2.2.

$$\begin{array}{lll}
 f(x) - \mathfrak{R}f(x) = f(x_0) \\
 \mathfrak{R}f(x) - \mathfrak{R}^2f(x) = \mathfrak{R}f(x_0) \\
 (1) \quad \begin{array}{ccc} : & : & : \\ : & : & : \\ : & : & : \end{array} \\
 \mathfrak{R}^m f(x) - \mathfrak{R}^{m+1}f(x) = \mathfrak{R}^m f(x_0)
 \end{array}$$

führt nach Addition dieser $m+1$ Gleichungen zu der einen Gleichung

$$(2) \quad f(x) - \mathfrak{R}^{m+1}f(x) = \sum_{i=0}^m \mathfrak{R}^i f(x_0), \text{ wenn man}$$

$$\mathfrak{R}^0 f := f \text{ setzt.}$$

(2) besagt, daß sich $f(x)$ von der m -ten Partialsumme der Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}^i f(x_0) \text{ nur um } \mathfrak{R}^{m+1}f(x) \text{ unterscheidet. Ziel wird es sein,}$$

zu zeigen, daß diese Differenz mit wachsendem m verschwindet.

Die Norm dieser Differenz ist beschränkt nach (6') von Lemma 3.2.5.

durch

$$(3) \quad \|R^{m+1}f(x)\| \leq (x_1 - x_0) \|R^m f(x)\|.$$

Beachtet man noch, daß für zwei positive Funktionen g_1 und g_2 mit der Eigenschaft $g_1 \leq g_2$ stets $\|g_1\| \leq \|g_2\|$ wegen der Positivität von $K(t)$ aus

(5) von Lemma 3.2.5. gilt, so führt die wiederholte Anwendung der

letzten Abschätzung (3) zu

$$\begin{aligned} (3') \quad \|R^{m+1}f(x)\| &\leq (x_1 - x_0) \|R^m f(x)\| \\ &\leq (x_1 - x_0)^2 \|R^{m-1}f(x)\| \\ &\vdots \\ &\leq (x_1 - x_0)^{m+1} \|Rf(x)\|. \end{aligned}$$

$\|R^{m+1}f(x)\|$ strebt für $m \rightarrow \infty$ gegen Null, was man aufgrund der Definition

$$\|R^{m+1}f(x)\| = \int_{x_0}^x K^{m+1}(t) \|f(t)\| dt$$

- wobei K^{m+1} den $(m+1)$ -ten iterierten Kern von K bedeutet - , der Beschränktheit von $\|f(t)\|$ und des Integrationsintervalls sowie der Abschätzung von K^{m+1} durch eine gegen Null strebende Schranke

$$(+)\quad \frac{Q^{m+1} \cdot (t-x_0)^m}{m!}, \quad |K(t)| \leq Q \quad \forall t, \text{ nachweist. } \langle 8 \rangle$$

Mit $\frac{1}{n^{m+1}} Nf(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ strebt aber auch $N \mathfrak{R}^{m+1} f(x)$ nach (3') gegen Null und damit nach Definition der Norm auch $\mathfrak{R}^{m+1} f(x)$.

Nach diesen Überlegungen gilt, wenn man in (2) den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ vollzieht, die Beziehung

$$(4) \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}^i f(x_0).$$

Wenn es also eine Lösung der Ausgangsintegralgleichungen (1) von Satz 3.2.2. gibt, so muß sie notwendigerweise die Gestalt (4) haben und ist eindeutig.

Daß $f(x)$, dargestellt durch (4), auch wirklich dem System (1) von Satz 3.2.2. genügt, wird im folgenden bewiesen.

Dazu werden die Schranken q bzw. Q von $Nf(x_0)$ bzw. $K(t)$ mit den Bedingungen

$$|Nf(x_0)| \leq q \quad \text{und} \quad |K(t)| \leq Q \quad \forall t$$

benötigt. Man sieht nun ein, daß die Darstellung von $f(x)$ in (4) sinnvoll ist, weil die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}^i f(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_0) \int_{x_0}^x K^i(t) dt$$

mit Hilfe von (+) durch die konvergente Exponentialfunktion

$f(x_0) \cdot e^{Q(x-x_0)}$ majorisiert wird und damit gleichmäßig und absolut konvergiert. Deshalb ist die gliedweise Anwendung des Integral-Operators $\mathfrak{R}$ auf die konvergente Reihe (4) erlaubt:

$$(5) - \mathcal{R}f(x) = - \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}^i f(x_0)$$

und führt nach Addition von (4) und (5) auf die Gleichung (3'') von Satz 3.2.2.:

$$f(x) - \mathcal{R}f(x) = \mathcal{R}^0 f(x_0) = f(x_0).$$

Damit ist gezeigt, daß $f(x)$, definiert durch (4), notwendig und hinreichend die einzige Lösung des ursprünglichen Integralgleichungssystems ist.

Satz 3.2.7.

Die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 3.2.6. Die einzelnen Bestände f_i werden in jedem Zeitpunkt x abgeschätzt durch

$$f_i(x) \leq \sqrt{q} \cdot \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_0)^l (\sqrt{Q})^l}{\sqrt{l!}} \right],$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Beweis:

Einerseits erhält man, indem man (3') des vorigen Satzes auf $f(x_0)$ anwendet, die Abschätzungskette

$$(1) \mathcal{N} \mathcal{R}^{m+1} f(x_0) \leq (x_1 - x_0)^{m+1} \mathcal{I}^{m+1} \mathcal{N} f(x_0)$$

$$= (x_1 - x_0)^{m+1} \mathcal{N} f(x_0) \cdot \int_{x_0}^x K^{m+1}(t) dt$$

$$\leq \frac{(x_1 - x_0)^{2(m+1)} \cdot q \cdot Q^{m+1}}{(m+1)!}$$

(+)

und andererseits, wenn man die Matrizengleichung (4) des vorigen Satzes zeilenweise für f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) betrachtet, die Reihe

$$(2) \quad f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{l=1}^4 R_{il} f_l(x_0) + \sum_{l=1}^4 R_{il}^2 f_l(x_0) + \dots$$

Die einzelnen Reihenglieder sollen nun näher behandelt werden. Wegen der Definition der Norm eines Funktionensystems kann man schließen:

$$f_i(x_0) \leq \sqrt{Nf(x_0)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^4 R_{il} f_l(x_0) &= \sum_{l=1}^4 f_l(x_0) \int_{x_0}^x K_{il}(t) dt = \sqrt{\left[\sum_{l=1}^4 f_l(x_0) \int_{x_0}^x K_{il}(t) dt \right]^2} \\ &\leq \sqrt{\left[\sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(t) f_l(x_0) dt \right]^2 + \dots + \left[\sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{4l}(t) f_l(x_0) dt \right]^2} \\ &= \sqrt{NR^1 f(x_0)} \end{aligned}$$

und allgemein

$$(3) \quad \sum_{l=1}^4 R_{il}^m f_l(x_0) \leq \sqrt{NR^m f(x_0)}.$$

Setzt man (1) noch in (2) unter Berücksichtigung von (3) ein, so findet man für die gewünschte Schranke von f_i die Gestalt

$$(4) \quad f_i(x) \leq \sqrt{q} + \sqrt{q} \cdot \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_0)^l (\sqrt{Q})^l}{l!} \right],$$

wobei q und Q wie oben die maximalen Werte von $Nf(x_0)$ und $K(t)$ bezeichnen.

IV 4. Ansatz mit iterierten Integralgleichungen

IV.1. Die Herleitung der Integralgleichungen für die einzelnen Bestände durch Iteration

Bemerkung 4.1.1.

Im System der Volterraschen Igl.en 2. Art

$$(1) f_i(x) - \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(t) f_l(t) dt = f_i(x_0) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

- vergleiche I) bis IV) von Satz 3.1.2. - , die durch Integration nach t zwischen den Grenzen x_0 und x aus den vier Dgl.en des quadratischen Zerfallsschemas (*) hervorgegangen sind, bezeichnen wie bisher f_1, f_2, f_3, f_4 die unbekannten Funktionen im Zeitintervall $[x_0, x]$. Die bekannten, nur von den Ausscheide- und Sterbensintensitäten abhängigen und daher ausgearteten Kerne sind auf dem gleichen Intervall definiert.

Im 4. Ansatz sollen Igl.en für die einzelnen Personenbestände durch iterative Anwendung der Igl. (1) hergeleitet werden ([15]).

Satz 4.1.2.

Die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mögen den Igl.en des Systems (1) von 4.1.1. genügen. Dann sind sie auch Lösungen des iterierten Systems ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$f_i(x) - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x K_{im}(t) f_m(x_0) dt - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x K_{im}^1(t) f_m(t) dt = f_i(x_0),$$

wobei K_{im}^1 definiert ist durch

$$K_{im}^1(t) := \sum_{l=1}^4 \int_t^x K_{il}(s) K_{lm}(t) ds.$$

Beweis:

Der Beweis ergibt sich leicht, indem man in (1) von 4.1.1. die Igl.

(1) für $i = 1$ und $x = s$ einsetzt, d.h.

$$f_1(s) = f_1(x_0) + \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^s K_{1m}(t) f_m(t) dt$$

wird eingesetzt in

$$\begin{aligned} f_i(x) - \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(t) f_l(t) dt &= f_i(x_0) \text{ und liefert} \\ (2) \quad f_i(x) - \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(t) f_l(x_0) dt \\ &- \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(s) \cdot \left[\sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^s K_{lm}(t) f_m(t) dt \right] ds = f_i(x_0). \end{aligned}$$

Mithilfe der Dirichlet-Transformation nimmt das in (2) auftretende iterierte Integral die Gestalt

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(s) \cdot \left[\sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^s K_{lm}(t) f_m(t) dt \right] ds &= \\ \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x \sum_{l=1}^4 K_{lm}(t) f_m(t) \cdot \left[\int_t^x K_{il}(s) ds \right] dt \end{aligned}$$

an und ergibt mit der Definition

$$K_{im}^1(t) := \sum_{l=1}^4 \int_t^x K_{il}(s) K_{lm}(t) ds$$

e Behauptung

$$(3) \quad f_i(x) - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x K_{im}(t) f_m(x_0) dt \\ - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x K_{im}^1(t) f_m(t) dt = f_i(x_0) .$$

atz 4.1.3.

Die einzelnen Bestände f_i gelten für $i = 1, 2, 3, 4$ die Volterraschen Bedingungen.

$$f_i(x) - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x L_{im}(s) f_m(x_0) ds = f_i(x_0) ,$$

denen die Kerne L_{im} Grenzfunktionen der konvergenten Reihen

$$L_{im}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{im}^j(s) \quad (K_{im}^0 = K_{im}) \text{ und die iterierten Kerne } K_{im}^j$$

nach Formel (2) des Beweises aufgebaut sind.

Beweis:

Nach der Voraussetzung, daß die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 dem System (1) aus 4.1.1. genügen, konnte man durch einmalige Iteration zeigen, daß sie dann auch das System (3) von 4.1.2. erfüllen.

Wiederholungen dieser Iteration führen schließlich zu der Formel

für f_i

$$(1) \quad f_i(x) - \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x \left[\sum_{j=0}^{\infty} K_{im}^j(s) \right] f_m(x_0) ds = f_i(x_0)$$

mit $K_{im}^0 = K_{im}$,

in der die iterierten Kerne K_{im}^j nach erneuten Anwendungen der Dirichlet-Transformation - analog zum Satz zuvor - durch

$$(2) K_{im}^j(t) = \sum_{l=1}^4 \int_t^x K_{il}(s) K_{lm}^{j-1}(t) ds$$

aufgebaut sind.

Die im Integranden von (1) auftretenden Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} K_{im}^j(s)$ sind für

$i = 1, 2, 3, 4$ sinnvoll, weil sie wegen der sie majorisierenden Exponentialfunktion absolut und gleichmäßig sogar für jeden Parameter λ , als insbesondere für $\lambda = 1$, konvergieren^{<9>} und als gleichmäßig konvergente Reihen stetiger Funktionen stetige Grenzfunktionen darstellen, die abkürzungshalber mit

$$(3) L_{im}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{im}^j(s) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

bezeichnet werden.

Die Gleichungen (1) und (3) gestatten es, die Funktionen f_i durch eine eindeutig bestimmte Formel

$$(4) f_i(x) = \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x L_{im}(s) f_m(x_0) ds = f_i(x_0) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

darzustellen.

Daß die durch die Gleichungen (4) gegebenen Funktionen auch wirklich die gesuchten Lösungen des Systems sind, prüft man durch Einsetzen von (4) in (1) von 4.1.1. nach und bestätigt somit die Behauptung:

zu wird in (1) von 4.1.1.

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{l=1}^4 \int_{x_0}^x K_{il}(t) f_l(t) dt$$

Integranden $f_l(t)$ - ausgedrückt durch die Formel (4) für $i:=1$ und $x:=t$,

$$f_l(t) = f_l(x_0) + \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^t L_{lm}(s) f_m(x_0) ds -$$

substituiert und führt zunächst auf die Integraliteration

$$(5) \quad f_i(x) = f_i(x_0) + \int_{x_0}^x \sum_{l=1}^4 K_{il}(t) \cdot [f_l(x_0) + \int_{x_0}^t \sum_{m=1}^4 L_{lm}(s) f_m(x_0) ds] dt,$$

unter Verwendung der Dirichlet Transformation, der Indextransformation $l:=m$ und der Variablensubstitution $t:=s$ die einfachere Gestalt

$$(6) \quad f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{m=1}^4 \int_{x_0}^x [K_{im}(s) + \sum_{l=1}^4 L_{lm}(s) \cdot \int_s^x K_{il}(t) dt] f_m(x_0) ds$$

nimmt.

Kern dieser Igl. darf man aber, nachdem man für $L_{lm}(s)$ die Definition als Grenzfunktion ausgenutzt hat, wegen der gleichmäßigen Konvergenz

Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} K_{lm}^j(s)$ die Integration mit der Limesbildung vertauschen

sieht dann sofort unter Einbeziehung der Definition (2) der iterierten Kerne, daß der Kern der Igl. (6) gerade mit $L_{im}(s)$ überein-

kommt.

Gesamt wurde also gezeigt, daß die Funktionen, definiert durch (4)

tatsächlich eindeutige Lösungen des Volterraschen Systems sind.

C₂) Das verallgemeinerte Schema mit Querverbindungen

Der Abschnitt C₁ dieser Arbeit hat in vier sich durch ihre Methode und Rechentechnik voneinander unterscheidenden Ansätzen versucht, Aussagen über das in der Einleitung beschriebene quadratische Schema unter Berücksichtigung der Diagonalverbindungen zusammenzustellen. Die vorangegangenen Kapitel sind von $k=2$ Attributen ausgegangen, die zu $2^k = 4$ Personengesamtheiten geführt haben.

Dabei wurden bisher die Überlegungen abgebrochen, wenn der Beweis auf eine Volterrasche bzw. Fredholmsche Igl. geführt hatte. Die Untersuchungen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieser Igl.en sind einem späteren Abschnitt vorbehalten (vgl. dazu Kapitel VI).

Zuvor soll jedoch auf die bedeutende Tatsache hingewiesen werden, daß die drei letzten Ansätze II, III und IV das gemeinsame Merkmal tragen vom quadratischen Schema (*) mit Diagonalverbindungen auf das verallgemeinerte Schema (**) mit Querverbindungen erweitert werden zu können. In den Aussagen der Sätze, Definitionen und Bemerkungen sowie in den Formulierungen der Beweise sind lediglich die Größe i , die bisher die Werte $1, 2, 3, 4$ fähig war, durch $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n: = 2^k\}$ zu ersetzen und Summationen, Produkte, Indizes oder Exponenten von 4 auf $n: = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) zu verallgemeinern. Man wird feststellen, daß man beim Übergang zu diesem allgemeineren Schema in der Integrationstheorie wegen der endlichen Additivität des Integrals auf keinerlei Schwierigkeiten stößt, nur müssen ggf. Systeme von n Integralgleichungen, (n, n) -Matrizen und umständlichere Terme in Kauf genommen werden.

Dagegen ist der Ansatz I wegen der darin enthaltenen Aufspaltung der Summenfunktion F in zwei Summanden S_1 und S_4 , die jeweils wieder durch zwei der Bestandsfunktionen f_i definiert sind, nicht verallgemeinernsfähig, weil dann die Summanden S_j von mehr als zwei Funktionen abhängen.

Zwar wird die versicherungsmathematische Anwendung dieser Theorie in den meisten Fällen mit dem quadratischen Schema auskommen, aber die Tatsache, daß die bisherigen Überlegungen auch auf das allgemeine Problem ausgeweitet werden können, dürfte besonders - und darauf wird im Schlußteil F nochmals eingegangen - für Wirtschaft und Technik von Interesse sein.

Bevor das 2. Kapitel von D die Volterraschen Igl.en auf ihre Lösbarkeit hin untersucht, wird im 1. Teil von D ein funktionalanalytisches Kapitel zur Abrundung der Theorie der Igl.en eingeschoben.

Im Gegensatz zu den der Problematik (*) und (**) entsprungenen, bisher verglichenen Ansätzen und Darstellungen wird jetzt - der Vollständigkeit halber - eine bereits bekannte Theorie entwickelt, für deren Quellen z.B. auf die Literatur [4], [6], [9], [12], [14] und [16] hingewiesen wird.

D) Die Lösungen der Problemstellungen C

V Funktionalanalytische Aspekte des Problems

V.1. Einführung des Fredholm - Operators

Definition 5.1.1.

Sei im folgenden stets $\mathbb{K}$ der reelle oder komplexe Körper,

X, Y $\mathbb{K}$ - Banachräume,

die Menge $LS(X, Y)$ definiert durch

$$LS(X, Y) := \{T \mid T : X \longrightarrow Y \text{ linear und stetig}\}.$$

Ein Operator $T \in LS(X, Y)$ heißt Fredholm - Operator, wenn T die drei folgenden Eigenschaften besitzt:

I) Kern T ist endlichdimensional,

II) Bild T ist abgeschlossener Unterraum von Y ,

III) $Y/\text{Bild } T$ ist endlichdimensional, d.h. die Codimension von Bild T ist endlich.

Definition 5.1.2.

X, Y seien normierte $\mathbb{K}$ - Vektorräume.

Eine Abbildung $T : M \longrightarrow Y$, wobei $M \subset X$ gilt, heißt vollstetig, wenn T

I) stetig und

II) kompakt ist.

Zur Abkürzung werde die Menge aller linearen und vollstetigen Abbildungen mit $LV(X, Y)$ bezeichnet, also

$$LV(X, Y) := \{T \mid T : X \longrightarrow Y \text{ linear und vollstetig}\}.$$

Satz 5.1.3.

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum, $T \in LV(X, X)$, und id_X bezeichne die Identität auf X . Dann ist $R := (\text{id}_X - T)$ ein Fredholm-Operator.

Beweis:

Nach Def. 5.1.1. müssen für die offenbar lineare und stetige Abbildung R die drei Eigenschaften eines Fredholm-Operators nachgewiesen werden.

Zu I) Die Endlichdimensionalität von Kern R ist zu zeigen.

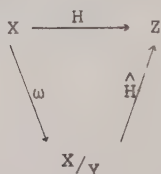
Sei dazu x ein beliebiges Element des Kerns von R , dann folgt mit $R(x) = (\text{id}_X - T)(x) = 0$, daß x ein Fixpunkt der Abbildung T ist und damit die beiden eingeschränkten Funktionen $\text{id}_X|_{\text{Kern } R}$ und $T|_{\text{Kern } R}$ gleich sind, wobei $T|_{\text{Kern } R}$ als Einschränkung eines kompakten Operators wieder kompakt, also auch $\text{id}_X|_{\text{Kern } R}$ kompakt ist.

Da das Bild der Einheitskugel S_1^X von X $\langle 10 \rangle$ unter einem kompakten Operator nach Definition der Kompaktheit relativ kompakt ist, da also gilt: $\text{id}_X|_{\text{Kern } R}(S_1^X) = S_1^{\text{Kern } R}$ ist relativ kompakt, folgt die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $\text{Kern } R \cong \mathbb{K}^n$, also die Endlichdimensionalität von Kern R .

Zu II) Es ist zu zeigen, daß Bild R ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

Nach dem Faktorisierungssatz für normierte $\mathbb{K}$ -Vektorräume X, Z gibt es zu jedem $H \in LS(X, Z)$ und zu jeder abgeschlossenen Teilmenge Y mit $Y \subset \text{Kern } H$ eine lineare stetige Abbildung $\hat{H}$,

so daß das folgende Diagramm kommutiert:



(wobei ω die natürliche Quotientenabbildung bezeichnet)

Wendet man auf $H: = R$, $Y: = \text{Kern } R$ und $Z: = \text{Bild } R$ diesen Faktorisierungssatz an, so kann man aufgrund der speziellen Definition von Z sogar die Isomorphieeigenschaft von $\hat{R}$ zeigen. Damit hat man die Isomorphie von Bild R zum Banachraum $X/\text{Kern } R$ nachgewiesen und schließt sofort über die Vollständigkeit von Bild R auf seine Abgeschlossenheit in X .

Zu III) Zu zeigen ist: $X/\text{Bild } R$ ist endlichdimensional. Der Beweis gründet sich auf den Satz, daß aus der Endlichdimensionalität eines Dualraumes die des eigentlichen Raumes folgt. Daher ist nur noch die Endlichdimensionalität von $(X/\text{Bild } R)'$ zu zeigen.

Nach dem Homomorphiesatz ist die Menge

$(X/\text{Bild } R)': = \{f|f: X/\text{Bild } R \longrightarrow \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$
 algebraisch isomorph zur Menge

$$\begin{aligned}
 & \{f|f: X \longrightarrow \mathbb{K}, \text{ linear und stetig, Kern } f \supset \text{Bild } R\} \\
 & = \{f|f \in X' \text{ und Kern } f \supset \text{Bild } R\} \\
 & = \{f|f \in X' \text{ und } f \circ R = 0^{<12>}\} \\
 & = \text{Kern } R',
 \end{aligned}$$

wenn man die Abbildung $R': X' \longrightarrow X'$ durch $f \longmapsto R'(f): = f \circ R$ definiert.

Da nach dem Satz von Schauder mit T auch T' kompakt ist, hat also $R' = (\text{id}_X - T)'$ die Gestalt $\text{id}_{X'} - T'$, was nach Teil I) dieses Satzes gerade die Endlichdimensionalität von Kern R' beinhaltet. Dann sind aber nach oben dargestellter Isomorphiebeziehung auch die Dimension von $(X/\text{Bild } R)'$ und die Codimension von Bild R endlich.

V.2. Anwendung auf lineare Integralgleichungen

Bemerkung 5.2.1.

Die folgednen Sätze und Folgerungen geben die Berechtigung dafür, daß die kompakten Operatoren für die Belange dieser Arbeit in V.1. eingeführt worden sind. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Theorie der kompakten Operatoren Aussagen über die Lösung der Fredholmschen bzw. Volterraschen Igl. zuläßt. Historisch betrachtet bildete die Untersuchung dieser Igl.en einen der wesentlichen Anstöße zur Entwicklung der Funktionalanalysis.

Satz 5.2.2.

Sei $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$, $K: [x_0, x_1] \times [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $C[x_0, x_1]$ der Banachraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[x_0, x_1]$.

Die Abbildung

$T_K : C[x_0, x_1] \longrightarrow C[x_0, x_1]$ sei definiert durch

$$f(\cdot) \longrightarrow [T_K(f)](\cdot) := \int_{x_0}^{x_1} K(\cdot, s) f(s) ds .$$

Beh.: Dann gilt:

I) T_K ist ein Operator in $C[x_0, x_1]$,

d.h. $f \in C[x_0, x_1] \Rightarrow T_K(f) \in C[x_0, x_1]$

II) T_K ist linear

III) T_K ist stetig

IV) T_K ist kompakt .

Beweis:

Zu I) Seien $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$, $t_0 \in [x_0, x_1]$ bel. fest und $f \in C[x_0, x_1]$ gegeben. Zu zeigen ist dann zu diesem vorgegebenen $\epsilon > 0$ die Existenz eines $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [x_0, x_1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt:

$$|T_K(f)(t) - T_K(f)(t_0)| < \epsilon \quad <13>.$$

Zunächst folgt aus der Stetigkeit von $K(t, \cdot)$ und $f(\cdot)$, daß auch das Produkt der beiden stetigen Funktionen $K(t, \cdot) \cdot f(\cdot)$ in $C[x_0, x_1]$ liegt und damit (Riemann -) integrierbar ist. Die Menge $\Delta := \{(t, s) \mid |K(t, s) - K(t_0, s)| \geq \hat{\epsilon}\}$, wobei $\hat{\epsilon}$ durch das vorgegebene ϵ folgendermaßen definiert ist

$$(1) \quad \hat{\epsilon} := \frac{\epsilon}{(x_1 - x_0) \cdot (||f|| + 1)} \quad <14>$$

ist wegen der Stetigkeit von K auf $[x_0, x_1] \times [x_0, x_1]$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen. Daher existiert ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$(2) \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow |K(t, s) - K(t_0, s)| < \hat{\epsilon} \text{ für alle } s \in [x_0, x_1],$$

woraus für die Operatornorm folgt:

$$(3) \quad ||K(t, \cdot) - K(t_0, \cdot)|| \leq \hat{\epsilon}.$$

Zusammen mit (1), (2), (3) gilt demnach für $|t - t_0| < \delta$ die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad |T_K(f)(t) - T_K(f)(t_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} [K(t,s)f(s) - K(t_0,s)f(s)] ds \right| \\
 &\leq \int_{x_0}^{x_1} |K(t,s) - K(t_0,s)| \cdot |f(s)| ds \\
 &\leq \int_{x_0}^{x_1} \hat{\varepsilon} \sup_{s \in [x_0, x_1]} |f(s)| ds \\
 &\leq \hat{\varepsilon} \cdot \|f\| \cdot (x_1 - x_0) < \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Völlig analog gelten in (2), (3) und (4) die Abschätzungen auch in der anderen Komponente, so daß insgesamt die Stetigkeit von $T_K(f)$ gezeigt ist.

Zu II) Die Linearität von T_K ergibt sich sofort aus der Additivität und Homogenität der Integrale:

Seien $f, g \in C[x_0, x_1]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist zu zeigen:

$$T_K(\alpha f + \beta g) = \alpha T_K(f) + \beta T_K(g) .$$

Die Gleichheit dieser beiden Funktionen wird argumentweise gezeigt: Sei dazu $t \in [x_0, x_1]$ bel. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
 T_K(\alpha f + \beta g)(t) &= \int_{x_0}^{x_1} K(t,s) [\alpha f(s) + \beta g(s)] ds \\
 &= \alpha \int_{x_0}^{x_1} K(t,s) f(s) ds + \beta \int_{x_0}^{x_1} K(t,s) g(s) ds \\
 &= [\alpha T_K(f) + \beta T_K(g)](t) .
 \end{aligned}$$

Zu III) Wegen der in II) nachgewiesenen Linearität reicht es, die Stetigkeit von T_K im Nullpunkt zu zeigen:

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $C[x_0, x_1]$. Aufgrund der Kompaktheit von $[x_0, x_1] \times [x_0, x_1]$ ist auch das Bild dieses Cartesischen Produktes unter der stetigen Abbildung K kompakt, also K beschränkt, etwa durch die Konstante $C > 0$.

Wegen

$$\begin{aligned} |T_K(f_n)(t)| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |K(t,s)| \cdot |f_n(s)| \, ds \leq \int_{x_0}^{x_1} C \cdot ||f_n|| \, ds \\ &= C \cdot (x_1 - x_0) \cdot ||f_n|| \end{aligned}$$

strebt mit $||f_n||$ auch $||T_K(f_n)||$ gegen Null.

Zu IV) Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli, welcher besagt, daß jede Teilmenge B von $C[x_0, x_1]$ mit den Eigenschaften

- 1) B ist beschränkt
- 2) B ist gleichgradig stetig

sogar relativ kompakt ist, ist nur noch für die Menge

$B := T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$, die nach I) eine Teilmenge von $C[x_0, x_1]$ ist, zu zeigen: 1) $T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$ ist beschränkt und
2) $T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$ ist gleichgradig stetig.

Denn dann folgt nach dem eben zitierten Satz, daß $T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$ relativ kompakt ist, was nach Definition gerade die Kompaktheit von T_K beinhaltet.

Zu 1) Für $f \in S_1^{C[x_0, x_1]}$ und $t \in [x_0, x_1]$ gilt

$$\begin{aligned} |T_K(f)(t)| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |K(t, s)| \cdot |f(s)| ds \leq \|K\| \cdot \|f\| \cdot (x_1 - x_0) \\ &\leq \|K\| \cdot (x_1 - x_0) =: D < \infty, \end{aligned}$$

womit die Beschränktheit von $T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$ bewiesen ist.

Zu 2) Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben.

In I) wurde bei der Stetigkeit von $T_K(f)$ schon gezeigt, daß zu

$\tilde{\epsilon} := \frac{\epsilon}{(x_1 - x_0)}$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $t, t_0 \in [x_0, x_1]$

mit $|t - t_0| < \delta$ gilt:

$$(5) \quad \|K(t, \cdot) - K(t_0, \cdot)\| < \tilde{\epsilon}.$$

Wählt man δ gemäß (5), so folgt für $|t - t_0| < \delta$ und $f \in S_1^{C[x_0, x_1]}$

$$\begin{aligned} (6) \quad |T_K(f)(t) - T_K(f)(t_0)| &\leq \int_{x_0}^{x_1} \|K(t, \cdot) - K(t_0, \cdot)\| \cdot \|f\| ds \\ &\leq \tilde{\epsilon} (x_1 - x_0) = \epsilon, \end{aligned}$$

woraus die gleichgradige Stetigkeit der Menge

$\{T_K(f) \mid f \in S_1^{C[x_0, x_1]}\}$ folgt.¹⁵⁾

Korollar 5.2.3.

Satz 5.2.2. besagt gerade, daß der sog. Integral - Operator vom Fredholmschen Typ

$T_K: C[x_0, x_1] \longrightarrow C[x_0, x_1]$ definiert durch

$$f(\cdot) \longrightarrow T_K(f)(\cdot) := \int_{x_0}^{x_1} K(\cdot, s) f(s) ds ,$$

wobei $K: [x_0, x_1] \times [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ als stetig vorausgesetzt wird, ein linearer vollstetiger Operator ist, also nach Satz 5.1.3. - da $X = C[x_0, x_1]$ ein $\mathbb{R}$ -Banachraum ist - die Abbildung $R := (id_X - T_K)$ einen Fredholm - Operator darstellt, d.h.

$R: C[x_0, x_1] \longrightarrow C[x_0, x_1]$ definiert durch

$$f(\cdot) \longrightarrow R(f)(\cdot) := f(\cdot) - \int_{x_0}^{x_1} K(\cdot, s) f(s) ds$$

ist ein Fredholm - Operator.

Offenbar ist die Frage nach der Surjektivität von R äquivalent zu der Frage nach der Lösbarkeit der Fredholmschen Igl. 2. Art

$$g(t) = f(t) - \int_{x_0}^{x_1} K(t, s) f(s) ds \quad \text{für alle } t \in [x_0, x_1] .$$

Bemerkung 5.2.4.

Durch das vorangegangene Korollar 5.2.3. ist zwischen einer speziellen linearen Igl. und der Gleichung $g = (id_X - T_K)(f)$ ein Zusammenhang aufgedeckt worden, der nun auch auf den Volterraschen Fall aus Analogiegründen kurz übertragen werden soll. Für das Folgende wird ebenfalls auf Paragraph VI.2. hingewiesen.

Satz 5.2.5.

Sei $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$,

$K_0: \{(t, s) \mid x_0 \leq s \leq t \leq x_1\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $X := C[x_0, x_1]$

der Banachraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[x_0, x_1]$.

Beh.: Dann gilt für die durch

$$T_{K_0}: C[x_0, x_1] \rightarrow C[x_0, x_1]$$

$$f(\cdot) \rightarrow [T_{K_0}(f)](\cdot) := \int_{x_0}^{\cdot} K_0(\cdot, s) f(s) ds$$

definierte Abbildung: $T_{K_0} \in LV(X, X)$.

Beweis:

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des entsprechenden Satzes 5.2.2. .

Definition 5.2.6.

- I) Ein Volterra - Operator ist ein Operator der Gestalt (Identität - kompakter Operator), wobei der kompakte Operator ein Spektrum besitzt, das nur aus der Menge $\{0\}$ besteht.
- II) Der bereits im Ansatz III.2. aufgetretene Operator R_0 , der durch

$$R_0 f(t) := \int_{x_0}^t K_0(t, s) f(s) ds \text{ definiert ist,}$$

heißt Integral - Operator vom Volterraschen Typ.

Anwendungsbeispiel 5.2.7.

Die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 5.2.5. .

Der durch $R_0 := (id_X - T_{K_0})$ definierte Operator ist ein Volterra - Operator, wie in Korollar 6.2.3. noch bewiesen wird.

Satz 5.2.8.

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum, $T: X \rightarrow X$ kompakt, $S := (\text{id}_X - T)$.

Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- I) S ist injektiv
- II) S ist surjektiv
- III) S ist bijektiv

Beweis:

Der Beweis dieses Satzes ist schnell erbracht, wenn man ein Lemma aus der Funktionalanalysis benutzt, das besagt: Unter den Voraussetzungen dieses Satzes gilt:

$$\dim \text{Kern } S = \dim X / \dim \text{Bild } S.$$

Auf den Beweis dieses Lemmas wird wegen des rein funktionalanalytischen Charakters verzichtet. Es sei jedoch erwähnt, daß in den Beweis die wesentliche Tatsache eingeht, daß die durch $K_m := \text{Kern } S^m$ und $B_m := \text{Bild } S^m$ definierten Kerne und Bilder die iterierten Operatoren S^m ($m \in \mathbb{N}_0$) ($S^0 := \text{id}_X$, $S^1 := S$) zunächst eine auf- bzw. absteigende Folge bilden, um dann ab einem wohl definierten Index $m_0 \in \mathbb{N}_0$ stationär zu verlaufen.

Für $m_0 = 0$ ergibt sich dann die obige Behauptung.

Beispiel 5.2.9.

Die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 5.2.5. .

Beh.: Der Volterra-Operator $R_0 := (\text{id}_X - T_{K_0})$ ist injektiv.

Beweis:

Sei $f \in X := C[x_0, x_1]$ beliebig.

Zu zeigen ist, daß aus der Prämisse $R_0(f) = 0$ folgt:

f ist die Nullfunktion.

Wegen der Äquivalenz $R_0(f) = 0 \iff f = T_{K_0}(f)$ gilt argumentweise für alle $t \in [x_0, x_1]$

$$(1) \quad f(t) = \int_{x_0}^t K_0(t,s) f(s) \, ds .$$

Die Stetigkeit von f und K_0 sichert die Existenz zweier Schränkungs-konstanten M_f und M_K mit

$$(2) \quad |f(s)| \leq M_f \quad \text{und} \quad |K_0(t,s)| \leq M_K \quad \forall t,s \in [x_0, x_1] .$$

Aus (1) und (2) folgt die Ungleichung

$$(3) \quad |f(s)| \leq \int_{x_0}^s M_K \cdot M_f \, d\tilde{s} = M_K \cdot M_f \cdot (s-x_0) ,$$

die nach Einsetzen in (1) zu

$$(4) \quad |f(t)| \leq M_K^2 \cdot M_f \cdot \frac{(t-x_0)^2}{2!} \quad \text{führt.}$$

Wiederholung dieses Einsetzungsverfahrens liefert schließlich nach $m-1$ Schritten ($m \in \mathbb{N}$) die Abschätzung

$$(5) \quad |f(t)| \leq M_K^m \cdot M_f \cdot \frac{(t-x_0)^m}{m!} \leq M_K^m \cdot M_f \cdot \frac{(x_1-x_0)^m}{m!} ,$$

die mit wachsendem m zu $f(t) = 0$ für alle $t \in [x_0, x_1]$ führt.

Korollar 5.2.10.

Das vorangestellte Beispiel und die Endlichdimensionalität von Kern R_0 sichern für stetige Kerne K_0 und stetige Funktionen aus $X := C[x_0, x_1]$ die Bijektivität des Volterra - Operators

$$R_0 := (\text{id}_X - T_{K_0}) : C[x_0, x_1] \longrightarrow C[x_0, x_1] ,$$

m.a.W.:

die Volterrasche Igl. 2. Art

$$g(t) = f(t) - \int_{x_0}^t K_0(t,s) f(s) \, ds \quad \forall t \in [x_0, x_1]$$

ist stets eindeutig zu vorgegebenem $g \in C[x_0, x_1]$ lösbar.

Die Beschaffenheit und Darstellbarkeit der Lösungsfunktion, deren Existenz und Eindeutigkeit eben nachgewiesen wurde, wird im folgenden Kapitel VI behandelt.

VI Die Lösbarkeit der Volterraschen Integralgleichung

VI.1. Der Hauptsatz über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Bemerkung 6.1.1.

1. Die Volterrasche Igl. kann als Spezialfall der Igl. vom Fredholm-
schen Typ aufgefaßt werden, wenn man den Volterra - Kern zwar - wie
im Fredholmschen Fall - auf dem Grundquadrat $[x_0, x_1] \times [x_0, x_1]$
definiert, ihn aber zusätzlich auf dem Dreieck

$$\{(x, t) \mid t > x\}$$

Null setzt.

Die Beziehung zwischen den beiden Igl.en ist dann die folgende:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{x_0}^{x_1} K(x, t) f(t) dt &= \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt + \int_x^{x_1} K(x, t) f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

da der Volterra - Kern $K(x, t)$ für $x > t$ verschwindet.

2. Da die verschiedenen Ansätze der Problemstellungen C in den meisten
Fällen auf Volterrasche Igl.en geführt haben, soll der Hauptsatz
über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nur Aussagen für die-
sen Typ beinhalten. Für entsprechende Aussagen über Fredholmsche
Igl.en wird auf die Theorie der Igl.en verwiesen.
3. Der folgende Hauptsatz basiert auf der allgemeinen Igl. mit dem
Parameter λ

$$(2) \quad g(x) = f(x) - \lambda \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt ,$$

für die - je nach Ansatz - die Funktionen für f, g und K einzu-
setzen sind.

Der Kern $K(x,t)$ ist in jedem der Ansätze I bis IV allein von der Variablen t abhängig, also ausgeartet, und weiterhin stetig, da er nur durch stetige Überlebens-, Sterbens- oder Ausscheideintensitäten definiert ist.

Die f entsprechenden Funktionen sind die stetigen Personenbestände selbst bzw. Summen davon oder deren Funktionensysteme in Spalten-darstellung.

Das freie Glied ist in den Ansätzen I bis IV speziell - bis auf einen konstanten Faktor - durch die Anfangsbestände zum Zeitpunkt x_0 bzw. durch eine stetige Funktion ^{<16>} zu ersetzen und daher integrierbar. ^{<17>} Der erste Spezialfall läßt sich aber auch unter den allgemeinen Fall (2) subsumieren. Mithin erfüllen die Funktionen f , g und K die Voraussetzungen des folgenden Hauptsatzes.

Hauptsatz 6.1.2.

Sei $[x_0, x_1]$ ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$.

Die Volterrasche Igl. 2. Art

$$(V) \quad f(x) - \lambda \int_{x_0}^x K(x,t) f(t) dt = g(x)$$

habe die folgenden Eigenschaften:

- I) das freie Glied g ist integrierbar in $[x_0, x_1]$,
- II) der Kern K ist stetig im Dreieck $\{(x,t) \mid x_0 \leq t \leq x \leq x_1\}$.

Beh.: Unter diesen Voraussetzungen besitzt die Igl. (V) eine integrierbare Lösung, die für jeden bel. Parameterwert λ - also speziell in den Ansätzen I bis IV für $\lambda := 1$ - nach der "Methode der sukzessiven Approximation" konstruiert werden kann.

Die integrierbare Lösung von (V) ist eindeutig.

Beweis:

Der Beweis dieses fundamentalen Satzes zerfällt in mehrere Teile:

- a) Die Volterrasche Igl. wird nach folgendem Iterationsverfahren gelöst, welches auch als "Methode der sukzessiven Approximation" bezeichnet wird.

In der Igl. (V), die sich unter Verwendung des Integral - Operators vom Volterraschen Typ (vgl. Def. 5.2.6. Teil II) auch in der Form

$$(1) \quad g(x) + \lambda Rf(x) = f(x)$$

schreiben läßt, wobei $R := T_{K_0}$ wie in Satz 5.2.5. definiert wird, setzt man:

$$f_0(x) := g(x)$$

$$f_1(x) := g(x) + \lambda Rf_0(x) = g(x) + \lambda Rg(x)$$

$$f_2(x) := g(x) + \lambda Rf_1(x) = g(x) + \lambda Rg(x) + \lambda^2 R^2 g(x)$$

und definiert rekursiv

$$(2) \quad f_m(x) := g(x) + \lambda Rf_{m-1}(x) = g(x) + \lambda Rg(x) + \lambda^2 R^2 g(x) + \dots + \lambda^m R^m g(x) \quad <18>$$

In (2) bedeutet, wie bisher, $R^1 g$ die 1-malige Anwendung des Integraloperators R auf g .

Verwendet man in (2) das Summenzeichen und definiert noch $R^0 = id$, so erhält man die durch Substitution entstandene Näherung f_m für f :

$$(3) \quad f_m(x) = \sum_{l=0}^m \lambda^l R^l g(x).$$

Den Limes dieser sukzessiven Approximationen - falls vorhanden - bezeichnet man als die Summe der "Neumannschen Reihe"

$$(4) \quad \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l R^l g(x).$$

- b) Im folgenden wird gezeigt, daß die Reihe (4) für jeden beliebigen, aber festen Parameterwert λ bel. x "regulär konvergiert", d.h. per

finitionem, daß die Reihe der absoluten Glieder gleichmäßig konvergiert. Dies wird in den Abschnitten c) bis f) bewiesen.

c) Durch Induktion wird gezeigt, daß für den m -ten iterierten Kern $K^m(x, t)$ gilt ($x \in [x_0, x_1]$):

$$(5) \quad K^m(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > x \\ \int_x^t K^{m-1}(x, s) K(s, t) ds & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Im Induktionsanfang ist für $m = 2$ zu zeigen - da $K^1 = K$ -

$$(6) \quad K^2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t > x \\ \int_x^t K(x, s) K(s, t) ds & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Nach der Definition der iterierten Kerne für den Integral-Operator vom Fredholmschen Typ gilt allgemein

$$K^m(x, t) = \int_{x_0}^{x_1} K^{m-1}(x, s) K(s, t) ds,$$

insbesondere für $m = 2$ folgt

$$(7) \quad K^2(x, t) = \int_{x_0}^{x_1} K(x, s) K(s, t) ds,$$

was im speziellen Fall des Integral-Operators vom Volterraschen Typ zu folgender Fallunterscheidung führt:

1. Fall: $t > x$

Im Unterfall α) $s < t$ ist nach Definition des Volterra-Kerns

$$K(s, t) = 0.$$

Im Unterfall β) $s > t$ gilt wegen $t > x$ dann auch $s > x$, also

$$K(x, s) = 0.$$

In beiden Fällen verschwindet also der Integrand und damit das Integral von (7), also ist $K^2(x,t) = 0$ für $t > x$.

2. Fall: $t < x$

Das Integrationsintervall von (7) wird in drei Teilintervalle zerlegt:

$$[x_0, x_1] = [x_0, t] \cup [t, x] \cup [x, x_1],$$

was eine Aufspaltung des Integrals (7) bewirkt:

$$(8) \quad K^2(x,t) = \int_{x_0}^t K(x,s) K(s,t) ds + \int_t^x K(x,s) K(s,t) ds + \int_x^{x_1} K(x,s) K(s,t) ds.$$

Im ersten Integral verschwindet nach Definition des Volterra-Kerns wegen $s \leq t$ der zweite Faktor $K(s,t)$, im dritten Integral der erste Faktor $K(x,s)$ wegen $x \leq s$. Also bleibt in (8) für $t < x$ nur das zweite Integral stehen, womit der Induktionsanfang (6) bewiesen ist.

Der Induktionsschluß läßt sich, wenn man die Induktionsvoraussetzung einfließen läßt, mit analogen Überlegungen und Fallunterscheidungen ohne Schwierigkeit nachweisen.

- d) Ebenfalls durch einen Induktionsbeweis nach m wird nun für den nicht trivialen Fall $t < x$ die Ungleichung

$$(9) \quad |K^{m+1}(x,t)| \leq \frac{Q^{m+1} (x-t)^m}{m!}$$

gezeigt, auf die bereits im Ansatz III.2. hingewiesen wurde.

Dabei bedeutet Q die nach Voraussetzung existierende Schränkungskonstante von K mit $|K(x,t)| \leq Q$ für alle $x_0 \leq t \leq x \leq x_1$.

Für den Induktionsanfang $m=0$ lautet die zu beweisende Abschätzung gerade $|K(x,t)| \leq Q$, die trivialerweise richtig ist.

Im Induktionsschluß, der im wesentlichen auf Formel (5) von

Teil c) beruht, geht bei der zweiten Abschätzung die Induktionsvoraussetzung ein:

$$\begin{aligned} |K^{m+1}(x, t)| &= \left| \int_t^x K^m(x, s) K(s, t) ds \right| \\ &\leq \int_t^x |K^m(x, s)| \cdot |K(s, t)| ds \\ &\leq \int_t^x \frac{Q^{m+1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} ds = \frac{Q^{m+1}(x-t)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Das allgemeine Glied der Neumannschen Reihe (4) soll nun abgeschätzt werden:

Es gilt für $l \geq 1$:

$$\begin{aligned} (10) \quad |\lambda^l R^l g(x)| &= |\lambda|^l \left| \int_{x_0}^x K^l(x, t) g(t) dt \right| \\ &\leq \frac{[|\lambda| \cdot Q]^l}{(l-1)!} \cdot \int_{x_0}^x (x_1 - x_0)^{l-1} |g(t)| dt \\ &\leq \frac{[|\lambda| \cdot Q]^l (x_1 - x_0)^{l-1}}{(l-1)!} \cdot \int_{x_0}^{x_1} |g(t)| dt, \end{aligned}$$

weil einerseits der iterierte Integral-Operator vom Volterraschen Typ R^l definiert ist durch

$$R^l g(x) := \int_{x_0}^x K^l(x, t) g(t) dt \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

und andererseits die Ungleichung (9) von Teil d) noch abgeschwächt werden kann, indem man das Intervall $[x_0, x]$ durch das größere $[x_0, x_1]$, welches $[x_0, x]$ umfaßt, ersetzt.

In (10) existiert der letzte Faktor auf der rechten Seite nach Voraussetzung des Satzes und nimmt einen endlichen Wert, etwa C, an.

f) Die Reihe $C \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[|\lambda| \cdot Q]^l (x_1 - x_0)^{l-1}}{(l-1)!} \right\}$ konvergiert absolut und

gleichmäßig für jeden bel. Wert λ bgl. x gegen den Summenwert

$$C |\lambda| Q e^{|\lambda| Q (x_1 - x_0)}.$$

Die Definition der Exponentialfunktion, dargestellt durch die Reihe

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}, \text{ liefert sofort die Behauptung.}$$

Da (10) nichts anderes besagt, als daß die Neumannsche Reihe gliedweise durch eine endliche konvergente Majorante abgeschätzt werden kann, folgt aus (10) sofort die reguläre Konvergenz der Neumannschen Reihe.

g) Es wird nun behauptet, daß der Limes der Neumannschen Reihe eine Lösungsfunktion der Volterraschen Igl. (V) ist.

Der nach Teil f) existierende Limes der Neumannschen Reihe (4) wird mit f bezeichnet:

$$(11) \quad f(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l R^l g(x).$$

Da die Folge der Partialsummen, $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$, regulär gegen f konvergiert, ändert auch Multiplikation mit dem durch Q beschränkten Kern K insbesondere nichts an der gleichmäßigen Konvergenz

$$(12) \quad K(x, t) f_m(t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} K(x, t) f(t).$$

Vermöge der sukzessiven Approximation

$$(2) \quad f_m(x) = g(x) + \lambda \int_{x_0}^x K(x, t) f_{m-1}(t) dt$$

und (12) gilt unter Beachtung, daß Limes und Integration bei gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden dürfen,

$$\begin{aligned}
 (13) \quad f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \\
 &= g(x) + \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x K(x, t) f_{m-1}(t) dt \\
 &= g(x) + \lambda \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt.
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung von (13) bestätigt die Behauptung von Teil g).

h) Die Integrierbarkeit von f folgt sofort aus der Summendarstellung

$$(11) \quad f(x) = g(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l \mathcal{R}^l g(x),$$

in der g und die iterierten Kerne K^l für jedes $l \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung des Satzes integrierbar sind.

i) Zum Schluß des Beweises fehlt nur noch, die Eindeutigkeit der Lösungsfunktion nachzuweisen. <19>

Angenommen, es gäbe zwei integrierbare Funktionen f und f^* , die beide die inhomogene Igl. (V) lösten:

$$f(x) = g(x) + \lambda \mathcal{R} f(x) \quad \text{und} \quad f^*(x) = g(x) + \lambda \mathcal{R} f^*(x).$$

Die Differenzfunktion $d := f - f^*$ löst dann die zugehörige homogene Igl. $d(x) = \lambda \mathcal{R} d(x)$, in der sukzessiv die auf der rechten Seite stehende Funktion d durch $\lambda \mathcal{R} d$ substituiert wird. Wiederholtes Vorgehen führt nach $(m-1)$ Schritten zu

$$\begin{aligned}
 (14) \quad d(x) &= \lambda^{m-1} \mathcal{R}^{m-1} (\lambda \mathcal{R} d(x)) = \lambda^m \mathcal{R}^m d(x) = \\
 &= \lambda^m \int_{x_0}^x K^m(x, t) d(t) dt,
 \end{aligned}$$

und der Betrag der linken Seite von (14) kann nach analogen

Überlegungen, wie sie in Teil d) durchgeführt wurden, durch

$$(15) \quad |d(x)| \leq \frac{[|\lambda| Q]^m (x_1 - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \int_{x_0}^{x_1} |d(t)| dt$$

abgeschätzt werden.

Der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in (15) bestätigt die Gleichheit von d mit der Nullfunktion und somit auch die von f mit f^* .

Hiermit ist der Beweis des Hauptsatzes vollständig erbracht.

VI.2. Das Spektrum eines Kerns

Definition 6.2.1.

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum, $T : X \longrightarrow X$ linear und stetig und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Folgende Begriffsbildungen sind unter diesen Voraussetzungen üblich:

- I) λ ist ein Spektralwert oder gehört zum Spektrum von T , wenn
 $(\lambda \text{id}_X - T)$ kein Isomorphismus ist.
- II) Die Menge $\sigma(T) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ Spektralwert von } T\}$
 heißt Spektrum von T .
- III) Einen Spektralwert λ nennt man Eigenwert von T , wenn
 $(\lambda \text{id}_X - T)$ nicht injektiv ist.
- IV) Die Dimension von Kern $(\lambda \text{id}_X - T)$ heißt die Vielfachheit von λ .

Das folgende Lemma bringt einen Zusammenhang zwischen Spektral- und Eigenwerten:

Lemma 6.2.2.

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Banachraum, $T : X \longrightarrow X$ kompakt, $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq 0$.

Beh.: Dann ist λ ein Eigenwert mit endlicher Vielfachheit.

Beweis:

Sei $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$ bel. vorgegeben.

Nach Definition eines Spektralwertes ist nach dem "open-mapping-theorem" mit $(\lambda \text{id}_X - T)$ bei Division durch λ auch $(\text{id}_X - \frac{T}{\lambda})$ nicht bijektiv.

Da $\frac{T}{\lambda}$ kompakt ist, folgt nach den Sätzen 5.2.8. und 5.1.3., daß $(\text{id}_X - \frac{T}{\lambda})$ die beiden Eigenschaften besitzt:

- 1. $(\text{id}_X - \frac{T}{\lambda})$ ist nicht injektiv,
- 2. Kern $(\text{id}_X - \frac{T}{\lambda})$ ist endlichdimensional.

Multiplikation mit λ ändert an diesen Eigenschaften nichts, so daß nach Definition λ ein Eigenwert von endlicher Vielfachheit ist.

Korollar 6.2.3.

Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 5.2.5.

Da die Volterrasche Igl.

$$f(t) - \lambda \int_{x_0}^t K_0(t,s) f(s) ds = g(t) -$$

wie im Hauptsatz 6.1.2. nachgewiesen wurde - für jedes $\lambda \neq 0$ und jedes integrierbare freie Glied g eindeutig lösbar ist, folgt insbesondere, daß mit T_{K_0} auch $\frac{1}{\lambda} T_{K_0}$ ein Integral-Operator vom Volterra-schen Typ und $(\tilde{\lambda} \text{id}_X - T_{K_0})$, wobei $\tilde{\lambda} := \frac{1}{\lambda}$ gesetzt wurde, bijektiv sind.

Also gehört nach Definition des Spektralwertes außer evtl. $\lambda = 0$ kein Parameterwert λ zum Spektrum von T_{K_0} . Daß $\lambda = 0$ ein Spektralwert ist, folgt aus der Kompaktheit des Volterra-Operators, der somit nicht surjektiv und mithin nicht bijektiv sein kann.

Damit ist auch die Aussage in Beispiel 5.2.7. bewiesen.

VII Erneuerungstheoretische Grundbegriffe

VII.1. Übersicht über die Komplexität offener Gesamtheiten

Bemerkung 7.1.1.

In den vorangegangenen Betrachtungen wurden die nach den Maßzahlen der zeit- und altersabhängigen Intensitäten ausgeschiedenen Personen nicht durch neue Mitglieder ersetzt.

Dies soll jedoch in den beiden folgenden Kapiteln, in denen Aussagen über offene Personenbestände hergeleitet werden, der Fall sein, denn in vielen Situationen erweist es sich als nützlich, Vorhersagen über Bestandsentwicklungen - sowohl durch Neuzugänge als auch durch Abgänge verursacht - machen zu können.

Definition 7.1.2.

Die im verallgemeinerten Fall auftretenden $n=2^k$ Personengesamtheiten, die bei Zugrundelegung von k Attributen ($k \in \mathbb{N}$) unterschieden werden können, mögen - wie bisher - mit $1, 2, \dots, n$ und die Anzahl ihrer Elemente mit $f_1, f_2, \dots, f_n$ ^{<20>} bezeichnet werden: f_1 gebe dabei den Umfang der Hauptgesamtheit an.

- I) "Zugänge" sind Elemente, die - aus einer Personengesamt i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) kommend - durch μ_{ij} in einen anderen Bestand j ($j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$) überwechseln. Die Intensitäten μ_{ij} beschreiben also für $i \neq j$ "interne" Vorgänge.
- II) "Neuzugänge" oder "Erneuerungen" dagegen sind Bezeichnungen für "externe" Elemente, die - von außerhalb kommend - in die Hauptgesamtheit aufgenommen werden, um ausgeschiedene Mitglieder zu ersetzen.

Bemerkung 7.1.3.

Es lassen sich nun verschiedene Theorien aufstellen, je nachdem welcher Art die Erneuerung ist. Die Erneuerungsprozesse können z.B. zum Ziel haben, bestimmte Personengruppen durch Neuzugänge zahlenmäßig konstant zu halten oder nur Erneuerungen mit bestimmten Altersstrukturen zuzulassen bzw. die ausscheidenden Personen so durch neue zu ersetzen, daß eine vorgeschriebene Entwicklung - evtl. linearen oder exponentiellen Charakters - annähernd erreicht wird.

WÜNSCHE hat in [21b] z.B. die Frage nach dem "kompensierenden" Neuzugang aufgeworfen und die Neuzugänge so "gesteuert", daß der Umlagebeitrag auf der ursprünglichen Höhe gehalten wurde.

Fallunterscheidung 7.1.4.

Den folgenden Kapiteln liegt die erste der genannten Möglichkeiten zugrunde. Für andere Zielsetzungen wird auf die mannigfaltige Literatur zur "Erneuerungstheorie" verwiesen.

Aber selbst wenn man sich auf die Konstanthaltung eines bestimmten Personenbestandes spezialisiert, treten noch folgende, genau zu unterscheidende Fälle auf:

1. Fall: Betrachtungen im Anfangszeitpunkt x_0

Die für die versicherungsmathematische Praxis relevanten Möglichkeiten werden in folgenden Unterfällen zusammengestellt, wobei die Fallunterscheidung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt:

Unterfall α_0) Jedes Element, das aus der Hauptgesamtheit 1 zu Beginn durch die Sterbensintensität $\mu_{11}(x_0)$ ausscheidet, wird sofort durch einen Neuzugang ersetzt.

Unterfall β_0) Jedes Element, das aus dem i-ten Bestand wegen $\mu_{ii}(x_0)$ ($i = 1, \dots, n$) ausscheidet, wird sofort durch ein neues

ersetzt. In diesem Fall werden Haupt- und Nebengesamtheiten zahlenmäßig als ein Personenbestand

$F(x_0) := f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0)$ aufgefaßt und nur die Mitglieder ersetzt, die durch Tod aus $F(x_0)$ ausscheiden.

Unterfall γ_0) Jedes Element, das aus der Hauptgesamtheit 1 aus irgendeinem der n Gründe $\mu_{1i}(x_0)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) ausscheidet, wird sofort durch ein neues ersetzt.

2. Fall: Betrachtungen in einem beliebigen Zeitpunkt $t \in (x_0, x]$

Man kann für einen beliebigen Zeitpunkt $t > x_0$ die oben zitierten Unterfälle übertragen auf die entsprechenden Fälle α), β), γ), die aus α_0), β_0), γ_0) dadurch entstehen, daß jeweils die Anzahl $f_i(x_0)$ durch $f_i(t)$ und $\mu_{ij}(x_0)$ durch $\mu_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) substituiert werden. Dabei bedeutet $f_i(t)$ zahlenmäßig die "kombinierte" Gesamtheit, die sich aus $f_i(x_0)$, den Zugängen zu i aus j ($j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$) und den Abgängen aus i im Zeitraum $[x_0, t]$ zusammensetzt.

Bemerkung 7.1.5.

1. Die Anzahl der möglichen Fälle macht eine Beschränkung notwendig, die sich in naheliegender Weise auf die in Problemstellung C aufgetretenen Fälle β) und γ) reduziert.
2. Um zu Aussagen über die erneuerungstheoretische Entwicklung zu gelangen, bedarf es der Herleitung einiger Begriffsbildungen, die - trotz der verschiedenen Fälle β) und γ) - mit den gleichen Bezeichnungen versehen werden, um im anschließenden Kapitel VIII eine einheitliche Darstellung der "Erneuerungsgleichung" zu erreichen.

VII.2. Die Intensitäten für die Hauptgesamtheit f_1 bzw. für die totale Personengesamtheit F im verallgemeinerten Schema C_2

Definition 7.2.1.

I) $M(x)$ bezeichne die gemittelte Ausscheideintensität eines (ursprünglich in irgendeinem der Bestände $1, 2, \dots, n$ vorhandenen bestimmten) Elementes

(β) aus der i -ten Gesamtheit wegen $\mu_{ii}(x)$ ($i = 1, \dots, n$),

(γ) aus der Hauptgesamtheit 1

genau im Zeitpunkt x .

II) Weiterhin mögen die Funktionen μ definiert sein durch

$$(\beta) \mu(x) := \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x) \mu_{ii}(x)}{\sum_{i=1}^n f_i(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x) \mu_{ii}(x)}{F(x)},$$

$$(\gamma) \mu(x) := \frac{\sum_{i=1}^n f_1(x) \mu_{1i}(x)}{f_1(x)} = \sum_{i=1}^n \mu_{1i}(x).$$

III) Schließlich ist es noch sinnvoll, die gemittelten Intensitäten $v(x)$ zu betrachten, die angeben, daß ein ursprünglich vorhandenes bestimmtes Element im Zeitpunkt x

(β) in einer der Gesamtheiten $1, \dots, n$ ist,

(γ) in der Hauptgesamtheit 1 ist.

Bemerkung 7.2.2.

1. Die Funktionen μ aus Teil II) von 7.2.1. sind gemittelte, bedingte Intensitäten. Sie kennzeichnen nämlich die Bedingung, daß

(β) ein zum Zeitpunkt x vorhandenes Element im Punkt x stirbt,

(γ) ein zum Zeitpunkt x in 1 vorhandenes Element im Punkt x aus 1 ausscheidet.

2. Per definitionem machen die Funktionen $v(x)$ in Teil III) (β) gerade Aussagen darüber, ob ein Element im Zeitpunkt x überhaupt noch zur totalen Personengesamtheit $F(x)$ zählt oder schon durch Tod ausgeschieden ist.

Lemma 7.2.3.

Offenbar bestehen zwischen den in Def. 7.2.1. eingeführten Größen und den Funktionen f_1 und F die folgenden Beziehungen:

$$I) \quad M(x) = \mu(x) \cdot v(x)$$

$$II) \quad (\beta) \quad v(x) = \frac{F(x)}{F(x_0)} \quad \text{bzw.} \quad (\gamma) \quad v(x) = \frac{f_1(x)}{F(x_0)}.$$

Beweis:

Behauptung I) gilt aufgrund der bekannten Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten: $P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$, in der P die Wahrscheinlichkeit, A und B die Ereignisse bezeichnen. Diese Formel ist entsprechend auf die aus den Problemstellungen dieser Arbeit hervorgegangenen Intensitäten und Ereignisse zu übertragen.

Behauptung II) folgt trivialerweise aus der Definition von v in 7.2.1., Teil III).

Bemerkung 7.2.4.

1. Es wird für die im vorangegangenen Lemma in II) (β) und (γ) auftretenden Zählerfunktionen $f_1(x)$ und $F(x)$ vorausgesetzt, daß sie - wie im Abschnitt C_2 beschrieben - berechnet worden sind.
2. Insgesamt folgt also, daß v , μ und M berechenbare und stetige Funktionen der Zeit sind, wobei die letzte Behauptung wegen der

Stetigkeit der Ausscheide- und Sterbensintensitäten sowie der Personengestände gilt.

3. Eine weitere Funktion, die die vorangestellten Betrachtungen von einem einzigen Zeitpunkt x auf das Zeitintervall $[x_0, x]$ ausdehnt, wird eingeführt in

Definition 7.2.5.

$M(x)$ sei die gemittelte Ausscheideintensität eines (im Punkt x_0 vorhandenen bestimmten) Elementes

(β) aus der i -ten Gesamtheit wegen μ_{ii} ($i = 1, \dots, n$),

(γ) aus der Hauptgesamtheit 1

zu irgendeinem Zeitpunkt t innerhalb des Intervalls $[x_0, x]$.

Lemma 7.2.6.

Den Zusammenhang zwischen M und $\bar{M}$ beschreibt Gleichung

$$(1) \quad M(x) = \int_{x_0}^x \bar{M}(t) \, dt,$$

also gilt speziell für die Fälle (β) und (γ)

$$(2) \quad (\beta) \quad M(x) = \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \left[\sum_{i=1}^n \mu_{ii}(t) f_i(t) \right] dt,$$

$$(\gamma) \quad M(x) = \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \mu(t) f_1(t) \, dt.$$

Beweis:

Der Beweis von (1) ist trivial, wenn man bedenkt, daß sich Intensitäten über einen Zeitraum aus denen in einem einzigen Zeitpunkt durch infinitesimale Summierung, d.h. durch Integration, zusammensetzen.

Die Gleichungen (2) ergeben sich sofort aus (1), wenn man noch die Beziehungen

$$M(t) = \mu(t) \cdot v(t)$$

und $\forall t \in [x_0, x]$

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{1i}(t)$$

berücksichtigt.

Satz 7.2.7.

Gleiche Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 7.2.6.

Beh.: Die Funktionswerte von M liegen zwischen 0 und 1.

Beweis:

Im Fall (β) ist die Behauptung leicht einsichtig, wenn man die verallgemeinerte Formel (1) von Lemma 1.2.1. einfließen läßt:

$$\begin{aligned} (1) \quad 0 \leq M(x) &= \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \left[\sum_{i=1}^n f_i(t) \mu_{1i}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x [-F'(t)] dt \\ &= \frac{1}{F(x_0)} [F(x_0) - F(x)] < 1. \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Abschätzung richtig, weil stets die Gesamtzahl $F(x)$ aller Elemente in einem beliebigen Zeitpunkt $x > x_0$ nach oben abgeschätzt werden kann durch die Gesamtzahl $F(x_0)$ zu Beginn.

Im Fall (γ) ist ein strenger Beweis der Behauptung

$$(2) \quad M(x) < 1$$

nicht möglich, da analoge Überlegungen mit Hilfe von Dgl. I) von Satz 1.1.4. zu folgender Darstellung von $M(x)$ führen:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 0 \leq M(x) &= \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \left[\sum_{i=1}^n \mu_{i1}(t) f_1(t) \right] dt \\
 &= \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \left[-f_1'(t) + \sum_{i=2}^n f_i(t) \mu_{i1}(t) \right] dt \\
 &= \frac{1}{F(x_0)} \left[f_1(x_0) - f_1(x) \right] + \\
 &\quad + \int_{x_0}^x \left[\frac{\sum_{i=2}^n f_i(t) \mu_{i1}(t)}{\sum_{i=2}^n f_i(t)} \cdot \frac{\sum_{i=2}^n f_i(t)}{F(x_0)} \right] dt.
 \end{aligned}$$

Der zweite Summand von (3) kann interpretiert werden als die Häufigkeit, mit der ein Element aus $i \neq 1$ nach 1 zwischen x_0 und x überwechselt ^{<21>}.

Intuitiv ist aber klar, daß in praktisch vorkommenden Fällen die Bedingung (2) erfüllt ist, weil i.a. ein Element nicht mehrere Male zwischen einer der Nebengesamtheiten $2, \dots, n$ und der Hauptgesamtheit 1 hin- und herpendelt.

Korollar 7.2.8.

1. Die Größe $1-M(x)$ ist nach Satz 7.2.7. positiv und besagt, daß ein bestimmtes, ursprünglich vorhandenes Element innerhalb des Zeitraums $[x_0, x]$ nicht ausgeschieden ist.
2. Entsprechend beschreibt $[1-M(x)]^{F(x_0)}$ die Intensität, mit der kein ursprünglich vorhandenes Element während $[x_0, x]$ ausgeschieden ist.
3. Schließlich kennzeichnet $1-[1-M(x)]^{F(x_0)}$ die Intensität des Ausscheidens mindestens eines Elementes innerhalb $[x_0, x]$. Die im folgenden benötigte Funktion $1-[1-M(x)]^{F(x_0)}$ wird mit $A(x)$ abgekürzt: $A(x) := 1-[1-M(x)]^{F(x_0)}$, und es gilt im Anfangszeitpunkt x_0 : $A(x_0) = 0$.

VIII Die Erneuerungsgleichung und ihre Lösbarkeit

VIII.1. Die Herleitung der Erneuerungsgleichung

Bemerkung 8.1.1.

1. Die beiden vorangegangenen Beispiele geben einen Hinweis dafür, wie man in anderen Fällen von 7.1.4. oder bei anderen Zielsetzungen der Erneuerungstheorie vorgehen könnte, um zu den grundlegenden Intensitätsbegriffen zu gelangen, mit deren Hilfe sich die Erneuerungsgleichung aufstellen läßt.
2. Um die Doppelspurigkeit von Fall (β) und (γ) zu vereinheitlichen, werden im folgenden stets parallele Aussagen hergeleitet, die sich auf die totale Personengesamtheit F im Fall (β) bzw. auf die Hauptgesamtheit f_1 im Fall (γ) beziehen.

Definition 8.1.2.

Die Intensität von genau m von außen kommenden Erneuerungen nach F bzw. nach f_1 im Zeitintervall $[x_0, x]$ wird mit $e_m(x)$ bezeichnet.

Korollar 8.1.3.

Für die als stetig vorausgesetzten Funktionen $e_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) gelten die folgenden Relationen:

$$\text{I) } A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(x)$$

$$\text{II) } \sum_{m=0}^{\infty} e_m(x) = 1 .$$

Beweis:

Beh. I) ist richtig, denn $A(x)$ beschreibt nach Definition aus 7.1.8. die Ausscheideintensität mindestens eines Elementes aus F bzw. f_1 im Zeitintervall $[x_0, x]$, und $\sum_{m=1}^{\infty} e_m(x)$ gibt ebenfalls die

Erneuerungsintensität von einem oder mehreren Elementen an.

Beh. II) folgt sofort aus I), wenn man noch berücksichtigt, daß $1-A(x) <^{22}>$ die Ausscheideintensität und $e_0(x)$ die Erneuerungsintensität von 0 Elementen im gleichen Intervall $[x_0, x]$ angeben, so daß also der Zusammenhang $1-A(x) = e_0(x)$ besteht.

Satz 8.1.4.

Die Funktion A besitzt folgende Eigenschaften:

$$I) \quad 0 \leq A(x) < 1 \quad \forall x > x_0$$

II) A ist isoton

III) A ist stetig.

Beweis:

Die Aussagen I) bis III) folgen sofort aus der Darstellung von A durch

$$(1) \quad A(x) = 1 - [1 - M(x)]^{F(x_0)}$$

mit

$$(2) \quad (\beta) \quad M(x) = \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n \mu_{ii}(t) f_i(t) dt$$

bzw.

$$(\gamma) \quad M(x) = \frac{1}{F(x_0)} \int_{x_0}^x \mu(t) f_1(t) dt$$

- wobei in (2) jeweils positive Integranden auftreten - und den entsprechenden Eigenschaften von M.

Satz 8.1.5.

Die Funktionswerte $e_m(x)$ können für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \geq x_0$ rekursiv durch die Formel

$$e_{m+1}(x) = \int_{x_0}^x e_m(x_0 + x - t) dA(t)$$

berechnet werden, wobei für das Anfangsglied $e_0(x) = 1-A(x)$ gilt.

Beweis:

Für den Beweis dieser Rekursionsformel und für die daraus resultierenden Schlußfolgerungen zur Herleitung und Lösung der sog. Erneuerungsgleichung wird auf die Literatur [17a], [17b] und [20] hingewiesen.

Für $m = 0$ erhält man nach Formel I) und II) von 8.1.3. für jedes $x \geq x_0$

$$(1) e_0(x) = 1-A(x) .$$

Für $m \geq 1$ gelten die folgenden Überlegungen:

Da e_m für alle $m \in \mathbb{N}_0$ stetige Funktionen darstellen und A nach Satz 8.1.4. die Eigenschaften der Isotonie bzw. der Stetigkeit in jedem Zeitintervall $[x_0, x]$ besitzt, ist die Existenz des in der Behauptung auftretenden Riemann-Stieltjes-Integrals gesichert.

$Z_{[x_0, x]}$ bezeichne die Menge der feinen Zerlegungsfolgen Z_n von $[x_0, x]$ mit: $x_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = x$.

Nach Wahl einer beliebigen feinen Zerlegungsfolge $Z_n \in Z_{[x_0, x]}$ werden die Zwischenpunkte τ_i , die man nach Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals beliebig in $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \dots, n$ festsetzen darf, jeweils auf den rechten Randpunkt des Teilintervalls verlegt, so daß gilt: $\tau_i = t_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Die Ausscheideintensität des ersten zu erneuernden Elementes in F bzw. in f_1 innerhalb des Teilintervalls $[t_{i-1}, t_i]$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) wird beschrieben durch $A(t_i) - A(t_{i-1})$, und die Erneuerungsintensität von genau m Elementen im restlichen Intervall $[t_i, x]$ - also nach der ersten Erneuerung bis zum Intervallende x - wird nach Definition 8.1.2. durch $e_m(x_0 + x - t_i)$ geliefert.

Da diese beiden Einzelereignisse unabhängig voneinander sind, ergibt sich die Intensität des zusammengesetzten Ereignisses zu

$$(2) [A(t_i) - A(t_{i-1})] \cdot e_m(x_0 + x - t_i) .$$

Bedenkt man nun noch, daß die erste Erneuerung von F bzw. f_1 in einem beliebigen Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) geschehen kann und die Vereinigung aller Teilintervalle gerade das ganze Intervall $[x_0, x]$ ausschöpft, so beschreibt das kombinierte Ereignis (2), aufsummiert über $[x_0, x]$,

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e_m(x_0 + x - t_i) \cdot [A(t_i) - A(t_{i-1})]$$

einerseits gerade die Intensität, im Intervall $[x_0, x]$ genau $m+1$ Erneuerungen vornehmen zu müssen, also $e_{m+1}(x)$.

Da (3) andererseits das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_{x_0}^x e_m(x_0 + x - t) dA(t)$ darstellt, welches nach obigen Betrachtungen existiert, so gilt der gesuchte rekursive Zusammenhang

$$(4) e_{m+1}(x) = \int_{x_0}^x e_m(x_0 + x - t) dA(t) .$$

Definition 8.1.6.

$E(x)$ bezeichne den Erwartungs- oder Mittelwert der Zufallsgröße $e_m(x)$. $E(x)$ ist also - um auch die inzwischen veraltete Terminologie von SAXER in [17b] zu erwähnen - die "mathematische Erwartung der Erneuerungszahlen" im Intervall $[x_0, x]$.

Korollar 8.1.7.

Aufgrund der Definition eines Erwartungswertes als Summe der gewichteten Intensitäten gilt, da $e_m(x)$ gerade die Intensität angibt, im Zeitintervall $[x_0, x]$ genau m Erneuerungen vorzunehmen,

$$E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot e_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot e_m(x) .$$

Lemma 8.1.8.

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot e_m$ konvergiert in jedem Zeitintervall $[x_0, x]$ gleichmäßig.

Beweis:

Aus I) und II) von 8.1.3. folgt wegen $e_0(x) = 1 - A(x)$

$$(1) \quad 0 \leq e_0(x) \leq 1.$$

Setzt man die rechte Ungleichung von (1) in die Rekursionsformel

(4) von Satz 8.1.5. für $m = 0$ ein, so erhält man

$$e_1(x) \leq \int_{x_0}^x 1 \, dA(t) = A(x) - A(x_0) = A(x),$$

weil aufgrund der letzten Bemerkung in Kor. 7.2.8. $A(x_0)$ verschwindet.

Die Eigenschaften der Funktion A (vgl. Satz 8.1.4.) sichern die

Existenz eines Punktes $x_1 > x_0$, so daß für alle $x \in (x_0, x_1]$

der Induktionsanfang

$$e_1(x) \leq A(x) \leq A^1(x_1) < 1$$

richtig ist.

Unter Voraussetzung der Induktionsannahme

$$e_{m-1}(x) \leq A^{m-1}(x_1) \quad \forall x \in (x_0, x_1]$$

folgt die für alle $x \in (x_0, x_1]$ gültige Abschätzung

$$e_m(x) = \int_{x_0}^x e_{m-1}(x_0 + x - t) \, dA(t) \leq A^{m-1}(x_1) \cdot A(x) \leq A^m(x_1),$$

womit der Induktionsschluß erbracht ist.

Insgesamt kann also für alle $x \in (x_0, x_1]$ die Größe $E_k(x)$ durch

$$E_k(x) = \sum_{m=1}^k m \cdot e_m(x) \leq \sum_{m=1}^k m \cdot A^m(x_1) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot A^m(x_1) =: C(x_1)$$

majorisiert werden.

Dabei ist $C(x_1)$ eine endliche Schranke wegen $A(x_1) < 1$ und der daraus resultierenden Konvergenz der Reihe.

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ liefert für alle $x \in (x_0, x_1]$ die gewünschte gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$E(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot e_m(x) .$$

Definition 8.1.9.

Die Partialsummen der gleichmäßig konvergenten Reihe $E = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot e_m$ der totalen Erneuerungszahlen werden im folgenden mit

$$E_k := \sum_{m=1}^k m \cdot e_m$$

bezeichnet.

Satz 8.1.10.

Für den Erwartungswert E der Erneuerungszahlen gilt die Igl. vom Volterra-Stieltjes-Typ

$$(E) \quad E(x) = A(x) + \int_{x_0}^x E(x_0 + x - t) \, dA(t),$$

wobei A die in Korollar 7.2.8. eingeführte Ausscheideintensität ist.

Beweis:

Der Beweis gründet sich auf die Definition der Partialsummen E_k und benutzt die Rekursionsformel (4) von 8.1.5., wonach gilt:

$$\begin{aligned} E_k(x) &= \sum_{m=1}^k m \cdot e_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^k e_m(x) + \sum_{m=1}^k (m-1) \int_{x_0}^x e_{m-1}(x_0 + x - t) \, dA(t) \\ &= \sum_{m=1}^k e_m(x) + \int_{x_0}^x \sum_{m=0}^{k-1} m \cdot e_m(x_0 + x - t) \, dA(t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^k e_m(x) + \int_{x_0}^x E_{k-1}(x_0+x-t) dA(t) .$$

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ist wegen des vorangegangenen Lemmas sinnvoll und führt unter Beachtung von Beziehung II) aus 8.1.3. zur gewünschten Igl.

$$(E) \quad E(x) = A(x) + \int_{x_0}^x E(x_0+x-t) dA(t) .$$

Bemerkung 8.1.11.

Die in Satz 8.1.10. hergeleitete Igl. (E) heißt "Erneuerungsgleichung". Sie ist eine Igl. 2. Art vom Volterra-Stieltjes-Typ für den Erwartungswert E der Erneuerungszahlen.

VIII.2. Die Lösung der Erneuerungsgleichung

Bemerkung 8.2.1.

Für die Lösung der Erneuerungsgleichung bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- I) Lösung durch Rekursion,
- II) Lösung durch sukzessive Approximation,
- III) Lösung durch Laplace-Transformation .

In den beiden folgenden Sätzen werden wegen des beschränkten Umfanges dieser Arbeit nur die Beweistechniken von I) und II) vorgeführt. Dabei werden in I) keine weiteren Voraussetzungen als die des Abschnitts E einfließen, und II) bietet ein analoges Verfahren zum Volterra-Riemannschen Fall im Abschnitt D.

Satz 8.2.2.

Die Lösung der Erneuerungsgleichung kann rekursiv gewonnen werden.

Beweis:

Der Beweis erübrigt sich, wenn man auf

1. die Darstellung $E(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k(x)$,
2. die Definition der Partialsummen E_k ,
3. die Rekursionsformel $e_{m+1}(x) = \int_{x_0}^x e_m(x_0 + x - t) dA(t)$ und
4. die Beziehung $e_0(x) = 1 - A(x)$

hinweist.

Hauptsatz 8.2.3.

Die eindeutige Lösung der Erneuerungsgleichung kann durch die Methode der sukzessiven Approximation gewonnen werden.

Beweis:

Der Beweis besteht, ähnlich wie im Hauptsatz 6.1.2., aus mehreren Schritten.

a) Zunächst werden Hilfsfunktionen $\tilde{E}_k$ rekursiv definiert durch

$$(1) \tilde{E}_0(x) := A(x)$$

$$\tilde{E}_1(x) := \int_{x_0}^x \tilde{E}_0(x_0+x-t) dA(t)$$

·
·
·

$$\tilde{E}_{m+1}(x) := \int_{x_0}^x \tilde{E}_m(x_0+x-t) dA(t) .$$

b) Dann wird durch vollständige Induktion gezeigt, daß für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(2) \tilde{E}_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k(x) .$$

Der Induktionsanfang ist nach Beziehung II) von 8.1.3. klar:

$$\tilde{E}_0(x) = A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x) .$$

Im Induktionsschluß geht sowohl die Induktionsvoraussetzung als auch die Aussage von Lemma 8.1.8. ein, und insgesamt beweist

(3) bei Anwendung einer Indextransformation die Behauptung:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m(x) &= \int_{x_0}^x \tilde{E}_{m-1}(x_0+x-t) dA(t) \\ &= \int_{x_0}^x \sum_{k=m}^{\infty} e_k(x_0+x-t) dA(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=m}^{\infty} \int_{x_0}^x e_k(x_0+x-t) dA(t) = \sum_{k=m}^{\infty} e_{k+1}(x) \\
 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} e_k(x) .
 \end{aligned}$$

c) Die gleichmäßige und absolute Konvergenz von $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_m$ erhält man durch Konstruktion einer gleichmäßig konvergenten Majorante: Nach 8.1.4. Teil I) ist die Funktion A beschränkt durch Eins,

$$(4) |A(x)| \leq 1 \quad \forall x \geq x_0 .$$

Diese Schränkungskonstante wird bei der Konstruktion der Hilfsfunktionen $\tilde{E}_k$ in a) eingesetzt, so daß man zu folgenden Abschätzungen gelangt:

$$(5) |\tilde{E}_0(x)| \leq 1 .$$

$$|\tilde{E}_1(x)| \leq \int_{x_0}^x dA(t) = A(x) ,$$

$$|\tilde{E}_2(x)| \leq \int_{x_0}^x A(t) dA(t) = \frac{A^2(x)}{2!} ,$$

⋮

$$|\tilde{E}_m(x)| \leq \int_{x_0}^x \frac{A^{m-1}(t) dA(t)}{(m-1)!} = \frac{A^m(x)}{m!} .$$

Bildet man die Reihe dieser betragsmäßigen Hilfsfunktionen (5), so sieht man sofort, daß $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_m(x)$ durch die gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m(x)}{m!} = e^{A(x)}$ majorisiert wird und damit selbst absolut und gleichmäßig konvergiert.

d) Im nächsten Schritt wird gezeigt, daß die Grenzfunktion der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_m$ gerade der Erwartungswert E ist.

$$(8) \quad A(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_{m+1}(x) = \tilde{E}_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{E}_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_m(x) ,$$

womit auch die letzte Behauptung bewiesen ist.

f) Es bleibt nur noch die Eindeutigkeit der Lösungsfunktion zu zeigen. Der Beweis hierfür wird indirekt geführt.

Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Funktionen E und E^* , die beide die inhomogene Igl. (E) lösten:

$$E(x) = A(x) + \int_{x_0}^x E(x_0+x-t) \, dA(t)$$

und

$$E^*(x) = A(x) + \int_{x_0}^x E^*(x_0+x-t) \, dA(t) .$$

Die Differenzfunktion $D := E - E^*$ löst dann die zugehörige homogene Igl.

$$(9) \quad D(x) = \int_{x_0}^x D(x_0+x-t) \, dA(t) ,$$

woraus für den Anfangszeitpunkt x_0 folgt

$$(10) \quad D(x_0) = 0 = E(x_0) - E^*(x_0) .$$

Die Beschränktheit von D (als Differenz zweier beschränkter Funktionen), die Supremumseigenschaft eines Punktes und die Gleichungen (9) und (10) sichern die Gültigkeit folgender Abschätzungskette und die Existenz eines t_0 in jedem Intervall $(x_0, x]$ mit

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \sup_{t \in (x_0, x]} |D(t)| &= \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} |D(t)| \\
 &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \int_{x_0}^t |D(x_0 + t - \tau)| \, dA(\tau) \\
 &< \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \int_{x_0}^t \sup_{t' \in (x_0, x]} |D(t')| \, dA(\tau) \\
 &= \sup_{t' \in (x_0, x]} |D(t')| \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \int_{x_0}^t dA(\tau) \\
 &\leq \sup_{t \in (x_0, x]} |D(t)|.
 \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Abschätzung von (11) wegen der Beschränktheit von A durch 1 richtig.

Insgesamt ist durch (11) die Annahme zweier verschiedener Lösungen zum Widerspruch geführt, womit nicht nur $E = E^{\blacksquare}$, sondern zugleich der Satz vollständig bewiesen ist.

VIII.3. Die Interpretation der Erneuerungsgleichung

Nachdem in den vorangegangenen Paragraphen die Erneuerungsgleichung hergeleitet und ihre Lösung konstruiert wurde, soll zum Abschluß dieses erneuerungstheoretischen Kapitels die Nützlichkeit dieser Igl. für die Versicherungsmathematik besprochen und ihre Auswertbarkeit interpretiert werden.

Die fundamentale Größe dieses Kapitels war der Erwartungswert E der Zufallsgrößen e_m , wobei $e_m(x)$ die Erneuerungsintensität von genau m Elementen in F bzw. f_1 innerhalb des endlichen Zeitintervalls $[x_0, x]$ bezeichnete. Dabei galt die Beziehung

$$E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot e_m(x) \quad \text{mit} \quad \sum_{m=0}^{\infty} e_m(x) = 1 .$$

Hat man nun diesen Erwartungswert als Lösung der Erneuerungsgleichung

$$E(x) = A(x) + \int_{x_0}^x E(x_0 + x - t) \, dA(t)$$

ermittelt, so gibt die jeweilige Zahl, d.h. der Funktionswert $E(x)$, in jedem Zeitpunkt $x \geq x_0$ an, wieviele Personen im Mittel im Fall (β) von 7.1.4. aus F durch Tod, d.h. durch $\mu_{11}, \mu_{22}, \dots, \mu_{nn}$, bzw. im Fall (γ) aus f_1 wegen $\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1n}$ in jedem beliebigen Zeitintervall $[x_0, x]$ ausgeschieden sind und somit von außen durch neue Elemente ersetzt werden müssen. Diese Elemente tragen im Fall (γ) alle Attribute der Hauptgesamtheit f_1 , und im Fall (β) gehören zunächst die neu zugeführten Elemente der totalen Personengesamtheit F an. Beschränkt man sich jedoch auf die Interpretation im versicherungsmathematischen Bereich, so wird es ein Versicherungsunternehmen für günstig erachten, wenn im Fall (β) ebenfalls nur Elemente zugeführt werden, die folgenden beiden Bedingungen genügen:

1. sie sind im Besitz von sämtlichen Attributen und folglich:
2. sie werden lediglich in die Hauptgesamtheit aufgenommen.

Dabei wird noch eine gewisse Altersstruktur eine Rolle spielen:

Man wird von den Neuzugängen verlangen, daß sie - je nachdem welche Zielsetzungen ein Versicherungsunternehmen anstrebt - alle das gleiche Eintrittsalter x_0 tragen oder sich in einer gewissen Altersverteilung befinden.

In beiden Fällen (β) und (γ) - und analoge Überlegungen lassen auch andere Möglichkeiten von Fallunterscheidungen zu - hat man daher einheitlich nach der Auffüllung erreicht, daß in jedem beliebigen Zeitintervall $[x_0, x]$ der ursprüngliche Anfangsbestand zahlenmäßig mit dem aufgefüllten übereinstimmt, d.h. daß der größenmäßige Umfang von F bzw. f_1 konstant gehalten wurde.

F) Anwendungsmöglichkeiten

Zum Schluß der Arbeit soll die Frage nach den Anwendungsmöglichkeiten und damit nach dem Sinn der in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten Veränderungs- und Erneuerungsvorgänge beantwortet werden.

I) Wie im einleitenden Kapitel erwähnt, können die hergeleiteten Aussagen über "Personengesamtheiten" abstrahiert und auf "Gesamtheiten allgemeiner Art" angewandt werden. SAXER beschreibt die Relevanz dieser Verallgemeinerung in [17a] folgendermaßen: "Die sog. Erneuerungstheorie ... spielt nicht nur in der Versicherungsmathematik eine bedeutende Rolle, sondern auch in der Frage der Erneuerung von Maschinen bei großen wirtschaftlichen Betrieben zwecks Aufstellung von Budgets."

Statt Maschinen kann hier jedes andere Objekt eingesetzt werden, dessen Existenz von der Variablen "Zeit" beeinflußt wird und somit von endlicher Lebensdauer ist. Für Industrie, Wirtschaft und Technik sind Vorhersagen über Elemente in bezug auf die Erneuerungstheorie unumgänglich, und die Präzision dieser Prognosen muß bei Elementen mit kurzer Lebensdauer und hohem Kostenaufwand verständlicherweise besonders hoch sein.

II) Neben diesem großen Gebiet der Veränderungs- und Erneuerungsvorgänge in "verallgemeinerten Gesamtheiten" dürften wohl die Versicherungseinrichtungen - vor allem auch Einrichtungen der sozialen Sicherheit - das Standardbeispiel der Anwendungsmöglichkeiten bilden. Ihre finanzielle Lage wird entscheidend durch die Entwicklungen von Personengesamtheiten geprägt, da alle versicherungsmathematischen Grundgrößen der Lebens- und Pensionsversicherung, wie Barwert, Deckungskapital, Bruttoprämie usw. von ihnen beeinflußt werden,

und es liegt im Interesse der Versicherer, diese Entwicklungstendenzen vorhersehen, berechnen und einplanen zu können, um vor finanziellen Fehlschlägen bewahrt zu bleiben.

Konkrete Belegungen der Personengesamtheiten können durch folgende k Attribute geschehen:

Im Fall $k = 2$ könnten z. B. die Attribute lauten:

1. einer bestimmten Versicherungsgemeinschaft anzugehören,
2. verheiratet zu sein.

In diesem Beispiel zerfällt die Hauptgesamtheit der verheirateten Versicherungsnehmer durch Austritt, Scheidung oder Tod des Ehepartners in drei Nebengesamtheiten.

Nochmalige Detaillierung führt auf den Fall $k = 3$, in dem jetzt die Attribute heißen:

1. einer bestimmten Versicherungsgemeinschaft anzugehören,
2. verheiratet zu sein,
3. keine Kinder zu besitzen.

Die Hauptgesamtheit der verheirateten, kinderlosen Versicherungsnehmer zerfällt bei Annahme des einen zusätzlichen dritten Attributes bereits in sieben Nebengesamtheiten.

III) Aber auch Anwendungsmöglichkeiten für $k = n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$) sind in der Praxis durchaus üblich. Hingewiesen wird in diesem Zusammenhang auf ein Beispiel, das der medizinischen Statistik entnommen ist, in dem die Attribute n verschiedene Todesursachen bedeuten mögen. Die Untersuchung dürfte in diesem Zusammenhang von Bedeutung sein, wieviele Personen einer Hauptgesamtheit an welcher Krankheit durch Tod ausgeschieden sind.

IV) Ein weiteres, bereits im ersten Abschnitt erwähntes Beispiel

ist die Pensionsversicherung. Für Pensionskassen sind - um Prognosen in finanzieller Hinsicht aufstellen zu können - Entwicklungen von Personengesamtheiten, die die beiden Attribute

1. der Pensionskasse anzugehören,

2. aktiv zu sein,

besitzen, von größter Bedeutung.

V) Neben der Lebens- und Pensionsversicherung können die vorangestellten Veränderungen- und Erneuerungsvorgänge auch auf die Mathematik der Krankenversicherung übertragen werden. Anstelle der Invaliditäts- und Reaktivierungsintensitäten treten in diesem Fall die Erkrankungs- und Gesundungsintensitäten.

Dieses Problem der Gesamtheiten und ihrer Maßzahlen behandelte BÖHMER bereits 1930 und führte es auf eine Integralgleichung zurück ([2b]). Er erweiterte sein Referat auf dem Stockholmer Aktuar-Kongreß damals durch eine Übersicht der bis dahin erfolgten Haupt- und Nebenleistungen von 40 deutschen Krankenversicherungsgesellschaften ([2c]).

VI) Nicht zuletzt ist die Theorie auf die Witwen- und Waisenversicherung übertragbar, deren Grundlagen SCHÖNWIESE untersucht hat. Hier treten anstelle der sonst üblichen Intensitäten die des Heirats und des Verheiratetseins. Wie BÖHMER gelingt auch SCHÖNWIESE die Herleitung einer Integralgleichung in [19].

Diese Beispiele und Hinweise mögen genügen, um das Anwendungsgebiet der Veränderungs- und Erneuerungstheorie abzustecken. Bemerkenswert ist noch, daß vermutlich die Invaliditätsversicherung am meisten von den hier vorgelegten Gedanken profitiert.

Daß das Bemühen um die Darstellung der Bestände zu jedem beliebigen

Zeitpunkt auf großem Interesse basiert, hat BÖHMER bereits 1914 bekundet, als er diese Darstellung durch die abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten gab ([2a]).

Mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen ist nun eine andere, moderne Darstellung der Bestände - beruhend auf den in der Dissertation von KRIEHL ([10]) aufgezeigten Ideen - gelungen.

G) Historischer Überblick

Die Entwicklung des dieser Arbeit zugrundeliegenden Themenkreises geht bis in die Mitte des vorigen Jahrhunderts zurück.

Die ersten, vor allem das Erneuerungsproblem betreffenden Fragen wurden von den Aktuaren KINKELIN (1869), SCHAERTLIN (1889), HERBELOT (1909), RISSER (1912), SCHENKER (1918) und ALDER (1923)^{<23>} aufgeworfen.

Nicht nur in den Anfängen, sondern auch in ihrer Weiterentwicklung verdankt die versicherungsmathematische Theorie des Erneuerungsproblems ihre Beiträge zum großen Teil den schweizer Autoren.

In den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts gelang MOSER die klassische Darstellung der Theorie in kontinuierlicher Beschreibung (vgl. dazu [13a] und [13b]). Ausgehend von dem kontinuierlichen Modell führte sie ihn auf Integralgleichungen für die Erneuerungsfunktion und die Erneuerungsichte - die sog. MOSERSchen Integralgleichungen - , die mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst wurden. MOSERs Problemstellung lautete: Wie verläuft die Erneuerungsfunktion, wenn die Personen einer Gesamtheit nach einem bestimmten Gesetz ausscheiden und die jeweils ausscheidenden Elemente durch neue im fixen Eintrittsalter x_0 ersetzt werden?

Die zeitlich sich anschließenden Beiträge bauen fast sämtlich auf dem MOSERSchen Modell auf oder verallgemeinern es in irgendeiner Richtung. Hier sind die Arbeiten von WYSS (1929) und ZWINGGI (1931) ([22a]), FERAUD und RICHTER (1941) zu nennen, die die Voraussetzung MOSERs, daß eine Personengesamtheit gleichen Eintrittsalters vorliegen müsse, abschwächten und einen zeitlich variablen Bestand zuließen.

Arbeiten von SCHÖNWIESE (1917) ([19]), SCHOENBAUM (1924/1925) ([18]), BÖHMER (1930) ([2c]) und KRIEHL (1936) ([10]) übertrugen die der Invaliditätsversicherung zugrundeliegende Theorie der Veränderungsvorgänge in Personengesamtheiten auf die Kranken-, Witwen- und Waisenversicherung, auf das Problem der Ledigen und Verheirateten bzw. auf die Anwendbarkeit in der mathematischen Statistik.

Verallgemeinerungen des Erneuerungsproblems in Richtung stochastische Prozesse, Markoff-Ketten und Verzweigungstheorie wurden von RICHTER (1941), DOOB (1948), FELLER (1949), HARRIS (1951) und AMMETER (1955) ([1]) unternommen, und diese wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung wird besonders in den letzten Jahren von vielen Mathematikern aufgenommen, die alle namentlich aufzuzählen hier zu weit führen würde.

Während die MOSERSche Erneuerungsfunktion sich als Lösung einer Integralgleichung herausstellt, führt in dem allgemeinen Problem die Bestimmung der Verteilungsfunktion zu Verbleibsordnungen höheren Grades, die sich durch wiederholte Faltung aus der Funktion der Ausscheidendichte ergeben. Der Mittelwert der akkumulierten Erneuerungszahl ist identisch mit der MOSERSchen Erneuerungsfunktion.

AMMETER beschreibt in [1] die Folgen von derjenigen Erweiterung des MOSERSchen Modells, in der ein ausscheidendes Element nicht nur durch ein, sondern durch mehrere neue Elemente ersetzt wird: "Das Erneuerungsproblem geht dann in das Verzweigungsproblem über, das bei biologischen und atomphysikalischen Untersuchungen, insbesondere bei der sog. Kettenreaktion, eine Rolle spielt."

Obwohl bereits einige numerische Auswertungen des Problems von WYSS (1927 - 1931), ZWINGGI (1931) ([22a]), PESTALOZZI (1940), SPRING (1955) und in der Dissertation von KANTERS (1953) in [8] vorliegen, läßt noch heute die praktische Anwendung der Theorie der Veränderungs- und Erneuerungsvorgänge offene Fragen zu.

ANMERKUNGEN

- <1> Der Übersicht wegen sind in der Skizze die in entgegengesetzte Richtungen orientierten Doppelpfeile, die die Ausscheideintensitäten von der i -ten in die k -te Gesamtheit und umgekehrt veranschaulichen sollen ($i \neq k$), durch eine einzige Strecke ersetzt und auf die Beschriftungen $\mu_{ik}(x)$ für $i \neq k$ verzichtet worden.
- <2> Abkürzungshalber sind die Doppelindizes weggelassen worden.
- <3> Die Äquivalenz der Ausdrücke gilt nach Gleichung (1) und (3) von Lemma 1.2.1. und Beziehung II) von Lemma 1.1.3.
- <4> Dabei gilt für $p_i(x_0)$ die analoge Anmerkung von Lemma 1.1.3. I).
- <5> Da die Dirichlet-Formel - oder auch Dirichlet-Transformation genannt - im folgenden noch mehrere Male zur Anwendung gelangt, wird sie an dieser Stelle zitiert ([3]).
- Für jede Funktion $f(x,y)$, die in dem Dreieck Δ , das von den Geraden $y=a$, $x=b$ und $y=x$ begrenzt wird, stetig ist, gilt die Formel
- $$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx.$$
- Für die Belange dieser Arbeit wird die Formel nur für Funktionen einer Variablen benötigt.
- <6> vgl. dazu auch Bemerkung 6.1.1.
- <7> Je nachdem, ob die Funktion f konstant oder nicht konstant ist, wird im folgenden die in (1) rechts stehende einfachere Schreibweise zur Kenntlichmachung benutzt:

$$(1) \quad (\mathcal{R}(f(\cdot)))(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x K(t) f(t) dt =: \mathcal{R} f(x), & \text{falls } f \text{ nicht konstant} \\ f(x_0) \int_{x_0}^x K(t) dt =: \mathcal{R} f(x_0), & \text{falls } f \text{ konstant:} \\ & f(x) = f(x_0) \quad \forall x \end{cases}$$

In dem Fall, daß f eine konstante Funktion ist, kann man zwar der Schreibweise die Abhängigkeit von der oberen Integrationsgrenze nicht mehr ablesen. Der Einfachheit halber wird sie aber trotzdem in diesem Kapitel benutzt (vgl. dazu auch [9] und [10]).

<8> Die letzte Behauptung (+) wird ausführlich im Kapitel VI bewiesen (vgl. dazu Hauptsatz 6.1.2., Beweisteil d) mit $K(t) := K(t, x_0)$ und $x_0 < t$).

<9> Dies wird in einem späteren Kapitel über die Lösung von Integralgleichungen im Hauptsatz 6.1.2. gezeigt und daher an dieser Stelle nicht näher erörtert.

<10> Die abgeschlossene Einheitskugel S_1^X eines normierten $\mathbb{K}$ -Vektorraums $(X, ||\cdot||)$ sei wie üblich definiert durch $S_1^X := \{ x \mid x \in X, ||x|| \leq 1 \}$.

<11> Z' bedeutet den $\mathbb{K}$ -Vektorraum der stetigen linearen Funktionale auf einem $\mathbb{K}$ -linearen Raum Z . Z' heißt der zu Z duale Raum, und es gilt: $Z' := LS(Z, \mathbb{K})$.

<12> $\emptyset$ bezeichne die Nullabbildung im Dualraum X' .

<13> Im folgenden wird - der Übersicht wegen und da Verwechslungen ausgeschlossen sind - $[T_K(f)](t)$ stets ohne eckige Klammern geschrieben und durch $T_K(f)(t)$ ersetzt.

<14> Die Norm auf $C[x_0, x_1]$ sei gegeben durch die Abbildung

$$\| \cdot \| : C[x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$f \longrightarrow \|f\| := \sup_{s \in [x_0, x_1]} |f(s)| .$$

- <15> Aus (6) folgt sogar wegen der Unabhängigkeit von t und t_0 - also wegen der Abhängigkeit des δ nur von ϵ - die gleichmäßige gleichgradige Stetigkeit von $T_K(S_1^{C[x_0, x_1]})$.
- <16> In den Ansätzen der Kapitel I und II wird das freie Glied in Integraldarstellung gegeben und ist somit eine stetige Funktion der oberen Integrationsgrenze.
- <17> Gemeint ist stets die Integrierbarkeit im Riemannschen Sinn.
- <18> Dabei sind die Approximationen f_1 ($1 \in \mathbb{N}_0$) nicht mit den Personenbeständen f_i ($i = 1, 2, 3, 4$ in C_1 oder $i = 1, \dots, n=2^k$ in C_2) zu verwechseln.
- <19> Die Eindeutigkeit der Lösungsfunktion ist zwar bereits in 5.2.9. und 5.2.10. mit funktionalanalytischen Mitteln gezeigt worden, soll aber der Vollständigkeit halber noch einmal direkt bewiesen werden.
- <20> Im folgenden wird unter n stets eine Zweierpotenz verstanden. Bereits im Abschnitt A wurde erläutert, warum ein Personenbestand bei Annahme von k Attributen in eine Hauptgesamtheit und 2^{k-1} Nebengesamtheiten zerfällt.
- <21> Der erste Faktor des Integranden ist nämlich gerade die gemittelte Intensität des Überwechselns eines Elementes genau im Zeitpunkt t von irgendeiner der Nebengesamtheiten i nach 1 ($i = 2, \dots, n$), der zweite Faktor beschreibt die gemittelte Intensität eines Elementes, sich im Zeitpunkt t in einer der $n-1$ Nebengesamtheiten aufzuhalten.

<22> Der in der Versicherungsmathematik übliche Übergang von Wahrscheinlichkeiten zu Intensitäten durch Limesbildung ("Momentanbeobachtung") sichert, daß - ebenso wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie - die Summen der Intensitäten zweier entgegengesetzter Ereignisse gerade Eins ergibt.

<23> Die Quellen der hier und auch an anderen Stellen der Arbeit zitierten und nur mit dem Erscheinungsjahr versehenen Beiträge können z.B. in dem Artikel von AMMETER in [1] nachgeschlagen werden.

ABKÜRZUNGEN

V	für alle
Beh.	Behauptung
bel.	beliebig
Bem.	Bemerkung
Bew.	Beweis
Bsp.	Beispiel
bzw.	beziehungsweise
Def.	Definition
Dgl.(en)	Differentialgleichung(en)
d.h.	das heißt
evtl.	eventuell
Fkt.(en)	Funktion(en)
ggf.	gegebenenfalls
i.a.	im allgemeinen
Igl.(en)	Integralgleichung(en)
Igl.system	Integralgleichungssystem
Kor.	Korollar
m.a.W.	mit anderen Worten
O.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
u.a.	unter anderem
usw.	und so weiter
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Die Großbuchstaben A bis G geben die Abschnitte,
 die römischen Zahlen I bis VIII die Kapitel,
 die arabischen Zahlen 1 bis 3 die Paragraphen der Arbeit an.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AMMETER, H. Das Erneuerungsproblem und seine Erweiterung auf stochastische Prozesse
Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker
55. Band, Heft 2, 1955, S. 265 - 304
- [2] BÖHMER, P. E. a) Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung
Jahrbuch für Versicherungsmathematik
1. Jahrgang, 1914, S. 142 - 167
- b) Über die technischen Grundlagen der Krankenversicherung
Berichte des 9. internationalen Aktuar-kongresses, Stockholm, 1930, S. 1 - 23
- c) Zur Technik der privaten deutschen Krankenversicherung
Berichte des 9. internationalen Aktuar-kongresses, Stockholm, 1930, S. 26 - 38
- [3] FICHTENHOLZ, G. M. Differential- und Integralrechnung III
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin, 1964
- [4] HAMEL, G. Integralgleichungen
Berlin . Göttingen . Heidelberg
Springer-Verlag, 1949
- [5] HELLINGER, E. Integralgleichungen und Gleichungen mit
TOEPLITZ, O. unendlichvielen Unbekannten
Chelsea Publishing Company
New York, N. Y., 1953
- [6] HIRZEBRUCH, F. Einführung in die Funktionalanalysis
SCHARLAU, W. Hochschultaschenbücher-Verlag
Bibliographisches Institut
Mannheim / Wien / Zürich, 1971

- [7] KAMKE, E. Differentialgleichungen
Akademische Verlagsgesellschaft
Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1964
- [8] KANTERS, P. J. A. Considérations sur le problème de
renouvellement
Academisch Proefschrift
Universiteit von Amsterdam, 1953
- [9] KOWALEWSKI, G. Integralgleichungen
Göschens Lehrbücherei
Walter de Gruyter & Co
Berlin W 10 und Leipzig, 1930
- [10] KRIEHL, L. Das Problem der Gesamtheiten in der
Invaliditätsversicherung
Veröffentlichungen des Deutschen Ver-
eins für Versicherungs-Wissenschaft
Heft 57, Berlin, 1936
- [11] MICHLIN, S. G. Vorlesungen über lineare Integralglei-
chungen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin, 1962
- [12] MICHLIN, S. G. Approximate Methods for Solution of
SMOLITSKIY, K. L. Differential and Integral Equations
American Elsevier Publishing Company Inc.
New York, 1967
- [13] MOSER, C. a) Beiträge zur Darstellung von Vorgängen
und des Beharrungszustandes bei einer sich
erneuernden Gesamtheit
Mitteilungen der Vereinigung schweizeri-
scher Versicherungsmathematiker
Heft 21, Bern, 1926
b) Integralgleichungen und sich erneuernde
Gesamtheiten
Berichte des IX. internationalen Kongres-
ses für Versicherungs-Wissenschaft
Band 3, Stockholm, 1930

- [14] PACHALE, H. Skripte zur Vorlesung Funktionalanalysis II
Freie Universität Berlin
WS 1973/74
- [15] POGORZELSKI, W. Integral Equations and their Applications
Volume I
Pergamon Press
PWN - Polish Scientific Publishers
Warszawa, 1966
- [16] ROTHE, R. Höhere Mathematik, Teil VII
SCHMEIDLER, W. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Stuttgart,
1960
- [17] SAXER, W. a) Versicherungsmathematik, 1. Teil
Berlin . Göttingen . Heidelberg
Springer-Verlag, 1955
b) Versicherungsmathematik , 2. Teil
Berlin . Göttingen . Heidelberg
Springer-Verlag, 1958
- [18] SCHOENBAUM, E. Anwendung der Volterraschen Integral-
gleichung in der mathematischen Statistik
Skandinavisk Aktuarietidskrift
Jahrgang 1925, Heft 1, S. 1 - 22
- [19] SCHÖNWIESE, R. Die Grundlagen der Witwenversicherung
Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-
wissenschaft
Band 17, Berlin, 1917, S. 513 - 538
- [20] WOLFF, K.-H. Versicherungsmathematik
Springer-Verlag
Wien . New York, 1970
- [21] WÜNSCHE, G. a) Über die Geometrie der Invaliditätsver-
sicherung
Dissertation
Technische Hochschule, Dresden, 1934

- b) Zur Finanzierung von Pensionsleistungen
durch Umlage bei zeitlicher Variation der
Ereigniswahrscheinlichkeiten
Comptes rendues du XVI^e Congrès Inter-
national d'Actuaires
Vol. I, Chap. IV
Brüssel, 1960

[22] ZWINGGI, E.

- a) Das Problem der Erneuerung
Festgabe Moser
Bern, 1931
- b) Versicherungsmathematik
Zweite, erweiterte Auflage
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1958

LEBENS LAUF

Am 15. Oktober 1949 wurde ich, Angelika Karin Annerose Herr, als einzige Tochter des Kaufmannes Wilhelm Josef Herr und seiner Ehefrau Mathilde Herr, geb. Wolf, in Frankfurt/Main geboren.

Seit 1950 wohne ich in Berlin.

Im April 1956 wurde ich in die staatlich anerkannte Privatschule, Grundschule und Oberschule wissenschaftlichen neusprachlichen Zweiges, St. Ursula, in Berlin Zehlendorf eingeschult. An dieser Schule wies ich Kenntnisse, die den Anforderungen für das Große Latinum entsprechen, nach und legte im Februar 1969 die Reifeprüfung ab.

Im anschließenden Sommersemester 1969 begann ich mit dem Studium der Mathematik im Hauptfach und der Physik im Nebenfach an der Freien Universität Berlin. Nach Ablegen der Diplom-Vorprüfung am Ende des 4. Semesters wechselte ich das Nebenfach von Physik auf Versicherungsmathematik und bekleidete für drei Jahre eine Hilfsassistentenstelle.

Meine Diplomarbeit "Die bisher für die Lebensversicherungsmathematik vorgeschlagenen Integralbegriffe" fertigte ich unter Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Münzner an. Ich bestand im Dezember 1973 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik und bin seit Juli 1974 als wissenschaftliche Assistentin am Fachbereich Mathematik der Freien Universität beschäftigt.

Eine zweijährige Ausbildung an der Viktoria-Fachschule schloß ich im Februar 1976 mit der Hauswirtschafts-Meisterprüfung ab und nahm anschließend an einem einjährigen Intensivlehrgang über Didaktik und Methodik der Arbeitslehre an der Pädagogischen Hochschule teil.

